SAGGIO FILOSOFICO

SULLE

PROBABILITÀ

DEL CONTE LAPLACE

Pari di Francia, Grand' Uffiziale della Legione di Onore; uno dei quaranta dell' Accademia francese; dell' Accademia delle Scienze; Membro del *Bureau* delle Longitudini di Francia; delle Società reali di Londra e di Gottinga; delle Accademie delle Scienze di Russia, Danimarca, Svezia, Prussia, Italia, ec.

VERSIONE DAL FRANCESE

ESEGUITA SULLA TERZA EDIZIONE DI PARIGI

DAL CITTATINO

LELIO M. FANELLI.

70407

Università di Roma
BIBLIOTECA
Inventario n° 7040

NAPOLI

Dai Torchi di Luca Marotta

Strada S. Biagio de' libraj n. 119.

1820.

Digitized by Google

Digitized by Google

IL TRADUTTORE.

LA Teoria delle Probabilità, *che vanta la sua origine nella semplice considerazione su i giuochi, e che sollevandosi gradatamente agli oggetti i più interessanti delle umane cognizioni ha occupato in seguito la mente dei più valenti letterati di Europa, meritar dovrebbe senza contrasto uno dei posti distinti nell' interessante sistema della pubblica istruzione. Ormai non v' è più ostacolo al progresso dei lumi. Se la Nazione napoletana ha saputo finalmente manifestare il voto di essere governata dalla più saggia delle costituzioni, se gli spiriti eran disposti ad effettuir tutto con quella moderazione che ha destato la meraviglia del mondo intero e che formerà un esempio singolare nella storia, se in seguito di ciò le operazioni tutte nei diversi rami dell' amministrazione generale non lasciano il minimo dubbio sullo slancio sublime che la Nazione ha preso; chi potrà mettere in problema se il Parlamento nazionale ordinerà la istallazione della cattedra di una scienza di cui non ve n' ha un' altra più degna delle nostre meditazioni?: ecco il primo motivo che mi ha spronato al presente lavoro.*

Il Saggio filosofico sulle Probabilità, *di cui presento*

Digitized by Google

la versione, è parto di un genio vivente della Francia. Con questo Saggio si vede, che la teoria delle Probabilità non è in sostanza, se non che il buon senso ridotto a calcolo: essa fa valutare con esattezza ciò che gli spiriti giusti sentono per una specie d' istinto, senza che possano il più delle volte rendersene ragione. Se si considerino i metodi analitici ai quali questa teoria ha dato origine, la verità dei principj che li servon di base, la logica fina e delicata ch' esige il loro impiego nella soluzione dei problemi, gli stabilimenti di pubblica utilità, che poggiano sopra di essa, e l' estensione che la medesima ha ricevuto e che può tuttavia ricevere colla sua applicazione alle questioni le più importanti della filosofia naturale e delle scienze morali; se si osservi inoltre, che nelle cose istesse che non possono essere assoggettate a calcolo essa offre le vedute le più sicure per guidarci nei nostri giudizj, e ci avverte a guarentirci dalle illusioni che spesso ci trascinano in errore, ognuno converrà sulla grande importanza della materia, e quindi sulla bontà delle cagioni che mi hanno determinato a presentare nel nostro idioma un' opera cotanto insigne.

Se non sarò riuscito nella mia impresa con quella esattezza che sa richiedersi da persone di maggiore abilità, la considerazione che almeno avrassi alle mie buone intenzioni li renderà più indulgenti su i difetti che mi rimarcheranno.

Digitized by Google

INTRODUZIONE.

Questo Saggio filosofico è lo sviluppo di una lezione sulle probabilità, che io diedi nel 1795, alle scuole normali ove fui chiamato in qualità di professore di matematiche unitamente a Lagrange, in virtù di un decreto della Convenzione nazionale. Poco fa ho pubblicato un' opera sull' istesso soggetto, col titolo *Théorie analytique des probabilités* (*). Ora senza il soccorso dell' analisi presento i principj ed i risultamenti generali di questa teoria, applicandoli alle questioni le più importanti della vita, i quali non sono in effetti che altrettanti problemi di probabilità. Rigorosamente parlando può dirsi an-

(*) Se le circostanze mi anderanno propizie, tenterò ancora di tradurre in italiano questo capo-d' opera di Laplace, come pure il rimanente delle sue egregie produzioni (Il Trad.).

Digitized by Google

cora, che tutte quasi le nostre cognizioni non sono che probabili, e nel picciol numero di cose che possiam sapere con certezza, per fino nelle scienze matematiche istesse, i mezzi principali di giungere alla scoperta della verità, l' induzione e l' analogia si fondano sulle probabilità; in guisa che il sistema intero delle umane cognizioni si riattacca alla teoria esposta in questo saggio. In esso vedrassi senza dubbio con interesse, che quando anche nei principj eterni della ragione, della giustizia e dell' umanità non si considerassero che le combinazioni favorevoli che son loro costantemente ligate, avvi un gran vantaggio a seguire questi principj e dei gravi inconvenienti a sfuggire: le loro combinazioni, come quelle che sono favorevoli alla lotteria, terminando sempre col prevalere in mezzo alle oscillazioni dell' azzardo. Io desidero che le riflessioni sparse in questo saggio, possano meritare l' attenzione dei filosofi, e dirigerla verso un oggetto cotanto degno di occuparli.

AVVERTIMENTO.

Nella versione di quest' opera io mi sono strettamente uniformato all' ortografia dell' originale francese. Ho seguito anche un tal sistema in altre opere matematiche che ho date alla luce; poichè ho osservato, che i Francesi trattandosi di calcolo profondono specialmente la virgolazione, ad oggetto di evitare la minima confusione in materie cotanto scrupolose (Il Trad.).

Digitized by Google

SAGGIO FILOSOFICO

SULLE

PROBABILITÀ

CAP. I.

Della Probabilità.

Tutti gli avvenimenti, quegli per fino che per la loro picciolezza sembran sottrarsi alle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza tanto necessaria quanto le rivoluzioni del sole. Nell' ignoranza dei legami che li uniscono al sistema intero dell' universo, si sono fatti dipendere dalle cause finali, o dall' azzardo, secondochè accadono e succedonsi con regolarità, o senz' ordine apparente; ma siffatte immaginarie cagioni sono state successivamente rimosse coi limiti delle nostre cognizioni, e scompariscono dell' intutto al cospetto della sana filosofia che non vede in esse se non che l' espressione dell' ignoranza in cui siamo delle vere cagioni.

Gli avvenimenti attuali hanno coi precedenti un legame fondato sul principio evidente, che una cosa non può cominciare ad esistere, senza una causa che la produca. Questo assioma conosciuto sotto il nome di *principio della ragion sufficiente*, estendesi ancora a quelle azioni che si giudicano indifferenti. La volontà la più libera senza un motivo che la determina non può dar loro origine; imperochè se tutte le circostanze delle due posizioni essendo esattamente

Digitized by Google

simili, agisse nell' una e si astenesse di agire nell' altra, la sua scelta sarebbe un effetto senza causa; sarebbe allora, al dir di Leibnitz, il cieco azzardo degli epicurei. L' opinione contraria è una illusione dello spirito che perdendo di vista le ragioni fuggitive della scelta della volontà nelle cose indifferenti, si persuade ch' essa si è determinata da se medesima e senza motivi.

Noi dunque dobbiamo ravvisare lo stato presente dell' universo come l' effetto del suo stato anteriore, e come la cagione di quello avvenire. Una intelligenza che per un dato istante conoscesse tutte le forze di cui la natura è animata, e la rispettiva situazione degli esseri che la compongono, se fosse d' altronde assai vasta per sottomettere questi dati all' analisi, abbraccierebbe nella medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell' universo e quei dell' atomo il più leggiero; niente sarebbe incerto per essa, e l' avvenire, come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano nella perfezione che ha saputo dare all' astronomia, offre un debole abbozzo di questa intelligenza. Le sue scoperte in meccanica ed in geometria, unite a quella della gravitazione universale, l' han messo in istato di comprendere nelle medesime espressioni analitiche gli stati passati e futuri del sistema del mondo. Applicando lo stesso metodo ad alcuni altri oggetti delle sue cognizioni, esso è giunto a riportare alle leggi generali i fenomeni osservati, ed a prevedere quelli che alcune date circostanze debbono far comparire. Tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità tendono a ravvicinarlo incessantemente all' intelligenza che abbiam concepito, ma dalla quale esso rimarrà sempre infinitamente lontano. Questa tendenza propria alla specie umana, è ciò che la rende superiore agli animali; e i suoi progressi in questo genere, distinguono le nazioni e i secoli, e fondano la loro vera gloria.

Sovvengaci, che in altri tempi ed in un' epoca non tanto remota, una pioggia od una estrema siccità, una cometa che

Digitized by Google

avesse portato una coda soverchiamente lunga, le ecclissi, le aurore boreali, e tutti in generale i fenomeni straordinarj eran riguardati come tanti segni dell' ira celeste. S' invocava il cielo per rimuovere la loro funesta influenza. Non si pregava perchè si sospendesse il corso dei pianeti e del sole: l' osservazione ebbe fatto ben presto sentire l' inutilità di queste preghiere. Ma poichè questi fenomeni accadendo e scomparendo a lunghi intervalli sembravan contrariare l' ordine della natura; si supponeva che il cielo li facesse nascere e li modificasse a suo talento, ad oggetto di punire i delitti della terra. Così la lunga coda della cometa del 1456 sparse il terrore nell' Europa, di già costernata dai rapidi successi dei Turchi che aveau rovesciato il Basso Impero; e il papa Callisto ordinò alcune preghiere pubbliche nelle quali si scongiurasse la cometa e i Turchi. Questo astro dopo quattro delle sue rivoluzioni ha eccitato fra noi un interesse ben differente. La cognizione delle leggi del sistema del mondo acquistata in questo intervallo, avea dissipato i palpiti prodotti dell' ignoranza dei veri rapporti dell'uomo coll' universo; e Halley avendo riconosciuto l' identità della cometa con quelle degli anni 1531, 1607 e 1682, annunziò il suo prossimo ritorno per la fine del 1758 o pel principio del 1759. Le persone illuminate attesero con impazienza questo ritorno che dovea confermare una delle più grandi scoperte che si fossero fatte nelle scienze, e verificare la predizione di Seneca, allorchè, parlando della rivoluzione di questi astri che discendono da una enorme distanza, ha detto: » Verrà un giorno che per effetto di « uno studio seguito di molti secoli, le cose attualmente « nascoste compariranno ad evidenza, e la posterità sarà « sorpresa che ci sieno scappate verità si lampanti «. Clairaut intraprese allora di assoggettare all' analisi le perturbazioni che la cometa avea sofferto coll' azione dei due più grossi pianeti, Giove e Saturno: dietro immensi calcoli egli fissò il suo prossimo passaggio al perifelio, verso il princi-

Digitized by Google

pio di aprile 1759; il che l'osservazione non tardò guari a verificare. La regolarità che l'astronomia ci mostra nel movimento delle comete, ha luogo senz'alcun dubbio in tutt'i fenomeni. La curva descritta da una semplice molecola di aria o di vapori, è regolata di una maniera egualmente certa che quella delle orbite planetarie: non avvi fra loro altra differenza se non se quella che la nostra ignoranza vi pone.

La probabilità è relativa in parte a questa ignoranza, ed in parte alle nostre cognizioni. Noi sappiamo che sopra tre o un più gran numero di avvenimenti, uno solo dee accadere; ma manca assolutamente l'appoggio per portarci a credere che l'uno di essi avverrà prima degli altri. In questo stato d'indecisione ci è impossibile di pronunziare con certezza sul tempo in cui debbono accadere. E' probabile intanto che uno di questi avvenimenti presi ad arbitrio, non avverrà; perchè vediamo molti casi egualmente possibili che escludono la sua esistenza, mentre che un solo la favorisce.

La teoria degli azzardi consiste nel ridurre tutti gli avvenimenti del medesimo genere, ad un certo numero di casi egualmente possibili, cioè tali che noi siamo egualmente indecisi sulla loro esistenza; e a determinare il numero dei casi favorevoli all'avvenimento di cui si cerca la probabilità. Il rapporto di questo numero con quello di tutt'i casi possibili è la misura di questa probabilità che non è parimenti se non una frazione il di cui numeratore è il numero dei casi favorevoli, e il denominatore è il numero di tutt'i casi possibili.

La nozione precedente della probabilità suppone, che facendo crescere nel medesimo rapporto il numero dei casi favorevoli, e quello di tutt'i casi possibili, la probabilità rimane la stessa. Per convincersene, si considerino due urne A e B, la prima delle quali contenghi quattro palle bianche e due nere, e la seconda due palle bianche ed una

Digitized by Google

nera. Si possono immaginare le due palle nere della prima urna legate ad un filo che si rompe all' istante in cui si colpisce una di esse, e le quattro palle bianche formanti due sistemi somiglianti. Tutte le combinazioni che faran colpire una delle palle del sistema nero, daranno una palla nera. Se si concepisce intanto che i fili che uniscono le palle non si rompono affatto, è evidente che il numero delle combinazioni possibili non si cangerà, non altrimenti che quello delle combinazioni favorevoli all' estrazione delle palle nere; dall' urna si estrarranno soltanto due palle nere per volta; la probabilità di estrarre una palla nera dall' urna sarà dunque la stessa che quella di prima. Ma in allora si ha evidentemente il caso dell' urna B', colla sola differenza che le tre palle di quest' ultima urna sono rimpiazzate da tre sistemi di due palle invariabilmente unite. Quì i casi egualmente possibili non sono l' estrazioni delle palle; sono le combinazioni che le apportano e la di cui somma supposta la stessa per ciascuna urna, è ripartita sopra sei palle nella prima, e sopra tre nella seconda.

Quando tutt' i casi sono favorevoli ad un avvenimento, la sua probabilità si cambia in certezza, e la sua espressione diviene eguale all' unità. Sotto questo rapporto, la certezza e la probabilità sono comparabili, quantunque siavi una differenza essenziale tra i due stati dello spirito, allorchè una verità gli è rigorosamente dimostrata, o quando vi scorge ancora una piccola sorgente di errore.

Nelle cose che non sono se non che verisimili, la differenza dei dati che ciascun uomo ha sopra di esse, è una delle principali cagioni della diversità delle opinioni che veggonsi regnare sopra i medesimi oggetti. Supponiamo per esempio che si abbiamo tre urne A, B, C, l' una delle quali non contenga che palle nere, mentre che le altre non ne contengono che bianche: si dee tirare una palla dall' urna C, e si addimanda la probabilità che questa palla sarà nera. Se s' ignora qual' è quella delle tre urne, che

Digitized by Google

non contiene che sole palle nere, in modo che non vi sia alcuna ragione di credere ch' essa è piuttosto C che B o A; queste tre ipotesi sembreranno egualmente possibili; e siccome una palla nera non può essere estratta che nella prima, la probabilità di estrarla è eguale ad un terzo. Se si sappia che l' urna A non contiene che palle bianche, l' indecisione non cade più allora che sulle urne B e C, e la probabilità che la palla estratta dall' urna C sarà nera, è una metà. Questa probabilità finalmente si cambia in certezza, se si è assicurato che le urne A e B non contengono che palle bianche.

E' lo stesso allorchè un fatto recitato al cospetto di una numerosa assemblea, ottiene diversi gradi di credenza, secondo l' estensione delle cognizioni degli uditori. Se l' uomo che li riferisce n' è intimamente persuaso, e se per la sua condizione e pel suo carattere ispira una gran confidenza, il suo racconto, straordinario che sia, rapporto agli uditori sprovvisti di lumi, avrà lo stesso grado di verisimiglianza di un fatto ordinario rapportato dalla stessa persona, ed essi vi appresteranno una fede intera. Se intanto qualcuno di essi ha avuto occasione di ascoltare lo stesso fatto contradetto da altri uomini egualmente rispettabili, egli sarà nel dubbio; e il fatto sarà giudicato falso dagli uditori illuminati che lo troveran contrario, sia a fatti ben verificati, sia alle leggi immutabili della natura.

La propagazione di questi errori che nei tempi d' ignoranza han coperto la faccia del mondo, è dovuta all' influenza dell' opinione di coloro che la moltitudine giudica i più istruiti, e su i quali essa è avvezza a riporre la sua confidenza sopra i più importanti oggetti della vita. La magia e l' astrologia ce ne somministrano due grandi esempj. Quegli errori inculcati dall' infanzia, adottati senza esame, e non aventi per base che la credenza universale, si sono mantenuti per lunghissimo tempo, fino a che finalmente i progressi delle scienze li ha distrutti nello spirito degli uomini illuminati

Digitized by Google

l' opinione de' quali li ha fatti scomparire presso il popolo istesso, col potere della imitazione e dell' abitudine, che aveali sì generalmente propagati. Questo potere, il più potente sostegno del mondo morale, stabilisce e conserva in una nazione intera delle idee assolutamente contrarie a quelle ch' esso mantiene altrove col medesimo impero. Quale indulgenza non dobbiam dunque avere per le opinioni differenti dalle nostre; poichè questa differenza non deriva sovente che dai punti di vista diversi in cui le circostanze ci han situato! Istruiam coloro che giudichiamo non essere illuminati abbastanza; ma esaminiamo prima con rigore le nostre proprie opinioni e pesiamo con imparzialità le loro probabilità rispettive (*).

La differenza delle opinioni dipende ancora dalla maniera con cui ciascuno determina l' influenza dei dati che gli son cogniti. La teoria delle probabilità dipende da considerazioni si delicate, che non deve far meraviglia se coi medesimi dati due persone trovano dei risultamenti diversi, sopratutto nelle questioni complicatissime.

Esponiamo qui i principj generali di questa Teoria.

(*) Questa insinuazione messa in pratica con quelle vedute con cui l' illustre A. la detta, produrrebbe effetti più salutari che non ne derivano dalla più saggia delle legislazioni. Se ne tenti la pruova per favore dell' umanità, ed io son sicuro che non verrassi a sopraseiderne.

Digitized by Google

CAP. II.

Principj generali del Calcolo delle Probabilità.

Primo Principio.

Il primo di questi principj è la definizione istessa della probabilità che, come si è veduto, è il rapporto del numero dei casi favorevoli con quello di tutt' i casi possibili.

Secondo Principio.

Ma ciò suppone i diversi casi egualmente possibili. Se essi non lo sono, si determineranno prima di tutto le loro possibilità rispettive la di cui giusta estimazione è uno dei punti più delicati della teoria degli azzardi. In allora la probabilità sarà la somma delle possibilità di ciascun caso favorevole. Rischiariamo questo principio con un esempio.

Supponiamo che si gitti nell' aria una moneta larga e sottilissima, le di cui due grandi faccie opposte, che chiameremo *croix* e *pile* (a), sieno perfettamente simili tra loro. Cerchiamo la probabilità di aver *croce* una volta almeno in due colpi. E' evidente che possono accadere quattro casi egualmente possibili, cioè *croce* al primo e secondo colpo; *croce* al primo colpo e *capo* al secondo; *capo* al primo colpo e *croce* al secondo; e finalmente *capo* ai due colpi. I tre primi casi sono favorevoli all' avvenimento di cui si cerca la probabilità, che per conseguenza è eguale a $\frac{3}{4}$; in

(a) *Croix* in una moneta, è la parte in cui suol' essere la leggenda. *Pile* è la faccia opposta, ed ove propriamente v' è l' arma del principe o il suo ritratto. Nel corso dell' opera noi diremo sempre *croce* ove l' originale dice *croix*, e capo, ove dice *pile*; e ciò perchè il giuoco che i Francesi chiamano di *croix et pile*, da noi vien detto giuoco *di capo o croce*.

Digitized by Google

maniera che vi è a scommettere tre contro uno che *croce* verrà almeno una volta in due colpi.

Possono in questo giuoco non contarsi che tre casi differenti, cioè *croce* al primo colpo, il che dispensa dal giocarne un secondo; *capo* al primo colpo e *croce* al secondo; e finalmente *capo* al primo e al secondo colpo. Ciò ridurrebbe la probabilità a $\frac{2}{3}$, se con d'Alembert si considerassero questi tre casi come egualmente possibili. Ma è visibile, che la probabilità di aver *croce* al primo colpo è $\frac{1}{2}$, mentre che quella dei due altri casi è $\frac{1}{4}$. Il primo caso è un avvenimento semplice che corrisponde ai due avvenimenti composti, *croce* al primo e secondo colpo, e *croce* al primo colpo, *capo* al secondo. Or, se conformemente al secondo principio si aggiunge la possibilità $\frac{1}{2}$ di *croce* al primo colpo, alla possibilità $\frac{1}{4}$ di *capo* arrivante al primo colpo e *croce* al secondo; si avrà $\frac{3}{4}$ per la probabilità cercata, il che si accorda con ciò che si trova nella supposizione in cui si giuocano i due colpi. Questa supposizione non arreca alcun cambiamento alla sorte di colui che scommette per questo avvenimento: essa serve soltanto a ridurre i diversi casi a casi egualmente possibili.

Terzo Principio.

Uno dei punti i più importanti della Teoria delle Probabilità, e quello che si presta maggiormente alle illusioni, è la maniera con cui le probabilità aumentano o diminuiscono per le loro scambievoli combinazioni. Se gli avvenimenti sono indipendenti gli uni dagli altri, la probabilità dell'esistenza del loro insieme è il prodotto delle loro probabilità particolari. Così la probabilità di tirare un asso con un sol dado essendo un sesto; quella di tirare due assi, gittando due dadi per volta, è un trentaseesimo. In effetti, ciascuna delle faccie dell'uno potendo combinarsi colle sei faccie dell'altro; vi sono trentasei casi egualmente possibi-

Digitized by Google

li, fra i quali uno solo dà i due assi. Generalmente parlando, la probabilità che un avvenimento semplice e nelle medesime circostanze accadrà di seguito un dato numero di volte, è eguale alla probabilità di questo avvenimento semplice inalzato ad una potenza indicata da questo numero. Così le potenze successive di una frazione minore dell' unità, diminuendo incessantemente, un avvenimento che dipende da una serie di probabilità grandissime, può addivenire estremamente poco verisimile. Supponiamo che un fatto ci sia trasmesso da venti testimonj, in maniera che il primo l' abbia trasmesso al secondo, il secondo al terzo, e così di seguito. Supponiamo ancora, che la probabilità di ciascuna testimonianza sia eguale a $\frac{9}{10}$: quella del fatto, risultante dalle testimonianze sarà minore di un ottavo. Questa diminuzione della probabilità non può paragonarsi meglio, che alla estinzione delle chiarezza degli oggetti, mediante l' interposizione di molti pezzi di vetro; essendo sufficiente un numero poco considerevole di pezzi per togliere la vista di un oggetto che un sol pezzo lascia scorgere in una maniera distinta. Sembra che gli storici non abbian fatto molta attenzione a questa degradazione della probabilità dei fatti, allorchè questi sono passati a traverso di un gran numero di generazioni successive: molti avvenimenti storici, reputati certi, sarebbero per lo meno dubbiosi, se si sottomettessero a questa pruova.

Nelle scienze puramente matematiche, le conseguenze le più lontane partecipano della certezza del principio da cui esse derivano. Nelle applicazioni dell' analisi alla fisica, le conseguenze hanno tutta la certezza dei fatti o delle esperienze. Ma nelle scienze morali, in cui ciascuna conseguenza non è dedotta da ciò che la precede, se non che di una maniera verisimile; probabili che sieno queste deduzioni, la probabilità dell' errore cresce col loro numero, e finisce col sorpassare la probabilità della verità, nelle conseguenze lontanissime dal principio.

Digitized by Google

Quarto Principio.

Allorchè due avvenimenti dipendono l' uno dall' altro ; la probabilità dell' avvenimento composto è il prodotto della probabilità del primo avvenimento moltiplicato per la probabilità , che questo avvenimento essendo giunto , l' altro avrà luogo. Così nel caso precedente di tre urne A , B , C , due delle quali non contengono che palle bianche , e una non ne contenghi che nere ; la probabilità di tirare una palla bianca dall' urna C è $\frac{2}{3}$; poichè sopra tre urne , due non contengono che palle di questo colore. Ma allorchè si è estratta una palla bianca dall' urna C ; l' indecisione relativa a quella delle urne che contengono sole palle nere non cadendo più che sulle urne A e B , la probabilità di estrarre una palla bianca dall' urna B e $\frac{1}{2}$; il prodotto di $\frac{2}{3}$ moltiplicato per $\frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{3}$ è dunque la probabilità di estrarre nel tempo istesso dalle urne B e C due palle bianche.

Da questo esempio si vede l' influenza degli avvenimenti passati sulla probabilità dei futuri. Imperochè la probabilità di estrarre una palla bianca dall' urna B , che primitivamente è $\frac{2}{3}$, si riduce ad $\frac{1}{2}$ allorchè si è estratta una palla bianca dall' urna C : essa si cambierebbe in certezza , se si avesse estratta una palla nera dalla medesima urna. Questa influenza si determinerà col mezzo del seguente principio , ch' è un corollario del precedente.

Quinto Principio.

Se si calcola a *priori* , la probabilità dell' avvenimento accaduto , e la probabilità di un avvenimento composto da questo e da un altro che si aspetta ; la seconda probabilità divisa per la prima , sarà la probabilità dell' avvenimento atteso , dedotta dall' avvenimento osservato.

Quì si presenta la questione agitata da alcuni filosofi , riguardante l' influenza del passato sulla probabilità del-

Digitized by Google

l'avvenire. Supponiamo che nel giuoco di *capo croce*, *croce* sia venuta più spesso che *capo*. Per ciò solo, noi saremo portati a credere che nella costituzione della moneta vi esiste una cagione costante che la favorisce. Così nella condotta della vita, la felicità costante è una pruova di abilità, che deve far impiegare di preferenza le persone felici. Ma se per l'instabilità delle circostanze noi siamo condotti incessantemente allo stato di una indecisione assoluta; se, per esempio, si cambia di moneta in ciascun colpo nel giuoco di *capo croce*, il passato non può spandere alcun lume sull' avvenire, e sarebbe assurdo il tenerne conto.

Sesto Principio.

Ciascuna delle cagioni alle quali un avvenimento osservato può essere attribuito, è indicata con tanto più di verisimiglianza, quanto è più probabile che questa cagione essendo supposta esistente, l'avvenimento avrà luogo; la probabilità dell' esistenza di una qualunque di queste cagioni, è dunque una frazione di cui il numeratore è la probabilità dell' avvenimento risultante da questa causa, e di cui il denominatore è la somma delle probabilità simili relative a tutte le cause: se queste cause diverse considerate *a priori* sono inegualmente probabili; in luogo della probabilità dell' avvenimento risultante da ciascuna causa, bisogna impiegare il prodotto di questa probabilità per quello della causa istessa. E' questo il principio fondamentale di quel ramo dell' analisi degli azzardi, il quale consiste nel rimontare dagli avvenimenti alle cagioni.

Questo principio assegna la ragione per la quale si attribuiscono gli avvenimenti regolari ad una causa particolare. Alcuni filosofi han creduto che questi avvenimenti sono meno possibili degli altri, e che al giuoco di *capo croce*, per esempio, la combinazione nella quale *croce* viene venti volte di seguito è men facile alla natura, di quelle in cui

Digitized by Google

croce e *capo* sono frammischiate di una maniera irregolare. Ma questa opinione suppone, che gli avvenimenti passati influiscono sulla possibilità degli avvenimenti futuri, il che non è ammisibile. Le combinazioni regolari non per altro accadono più al raro, se non perchè sono meno numerose. Se noi ricerchiamo una cagione, là ove ravvisiamo della simmetria, ciò non è perchè riguardiamo un avvenimento simmetrico come men possibile degli altri, ma questo avvenimento dovendo essere l' effetto di una cagione regolare, o quello dell' azzardo, la prima di queste supposizioni è più probabile della seconda. Noi vediamo sopra una tavola alcuni caratteri di stamperia, disposti in quest' ordine, *Costantinopoli*, e giudichiamo che questa combinazione non è l' effetto dell' azzardo, non perchè è men possibile delle altre, poichè se questo vocabolo non era impiegato in alcuna lingua, non gli supporressimo alcuna cagione particolare; ma come questo vocabolo è usitato fra noi, è incomparabilmente più probabile che qualcuno avrà disposto in tal guisa i caratteri precedenti, e non già che una tale combinazione sia l' effetto dell' azzardo.

E' questo il luogo di definire il vocabolo *straordinario*. Noi disponiamo col pensiere tutti gli avvenimenti possibili in diverse classi, e riguardiamo come *straordinarie* quelle fra le classi che ne contengono un picciolissimo numero. Così, al giuoco di *capo croce*, il venir di *croce* cento volte di seguito ci sembra straordinario, perchè il numero pressochè infinito delle combinazioni che possono accadere in cento colpi, essendo diviso in serie regolari o nelle quali noi vediam regnare un ordine facile a comprendere, ed in serie irregolari; queste sono incomparabilmente più numerose. La sortita di una palla bianca da un' urna che sopra un milione di palle non ne contiene che una sola di questo colore, essendo nere tutte le altre, ci sembra ancora straordinario; poichè noi non formiamo che due classi di avvenimenti, relativi ai due colori. Ma la sortita di un numero

Digitized by Google

475813, per esempio, da un' urna che contiene un milione di numeri, ci sembra un avvenimento ordinario; perchè paragonando individualmente i numeri gli uni agli altri, senza dividerli in classi, non abbiamo alcuna ragione di credere che l' uno di essi sortirà piuttosto che gli altri.

Da ciò che abbiam detto dobbiamo generalmente conchiudere, che più un fatto è straordinario, più ha bisogno di esser poggiato a delle forti pruove. Imperochè coloro che l' attestano, potendo o ingannare o essere stati ingannati; queste due cagioni sono tanto più probabili quanto la realtà del fatto l' è meno in se stessa. Ciò si vedrà particolarmente allorchè parleremo della probabilità delle testimonianze.

Ottavo Principio.

La probabilità di un avvenimento futuro è la somma dei prodotti della probabilità di ciascuna causa, dedotta dall' avvenimento osservato, per la probabilità, che esistendo questa causa, l' avvenimento futuro avrà luogo. L' esempio seguente rischiarerà questo principio.

Immaginiamo un' urna la quale contenghi due palle ciascuna delle quali sia o bianca o nera. Si estrae una di queste palle, che si rimette quindi nell' urna, per procedere ad una nuova estrazione. Supponiamo che nelle due prime estrazioni sieno uscite palle bianche; si domanda la probabilità di ricevere anche una palla bianca al terzo estratto.

Non posson qui farsi che queste due ipotesi; o l' una delle palle è biancha, e l' altra nera; o entrambe son bianche. Nella prima ipotesi la probabilità dell' avvenimento osservato è $\frac{1}{4}$: essa è l' unità o la certezza nel secondo. Così, riguardando queste ipotesi come altrettante cagioni; si avrà, pel sesto principio, $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$ per le loro probabilità rispettive. Or se la prima ipotesi ha luogo, la probabilità di estrarre una palla bianca alla terza estrazione è $\frac{1}{2}$: essa egua-

Digitized by Google

glia l'unità nella seconda ipotesi; moltiplicando dunque queste ultime probabilità, per quelle delle ipotesi corrispondenti, la somma dei prodotti, o $\frac{2}{12}$ sarà la probabilità di estrarre una palla bianca al terzo tiro.

Quando la probabilità di un avvenimento semplice è incognita, gli si possono egualmente supporre tutt'i valori da zero fino all'unità. La probabilità di ciascuna di queste ipotesi dedotta dall'avvenimento osservato, è, pel sesto principio, un rotto di cui il numeratore è la probabilità dell'avvenimento in questa ipotesi, e di cui il denominatore è la somma delle probabilità simili relative a tutte le ipotesi. Così la probabilità che la possibilità dell'avvenimento è compresa nei dati limiti, è la somma delle frazioni comprese in questi limiti. Intanto se si moltiplica ciascuna frazione per la probabilità dell'avvenimento futuro, determinata nell'ipotesi corrispondente; la somma dei prodotti relativi a tutte le ipotesi sarà, pel settimo principio, la probabilità dell'avvenimento osservato. Parimente si trova, che un avvenimento essendo giunto di seguito un numero qualunque di volte; la probabilità che esso accadrà ancora la volta seguente, è eguale a questo numero aumentato dell'unità, diviso pel medesimo numero aumentato di due unità. Facendo per esempio rimontare la più antica epoca della storia a cinquemil'anni, o a 1826213 giorni, ed essendosi il sole costantemente levato in questo intervallo a ciascuna rivoluzione di 24 ore; avvi a scommettere 1826214 contro uno, ch'esso leverassi ancor domani. Ma questo numero è incomparabilmente più forte per colui che conoscendo dall'insieme dei fenomeni il principio regolatore dei giorni e delle stagioni, non vede come nel momento attuale possa arrestarsene il corso.

Buffon nella sua aritmetica politica calcola differentemente la probabilità anzidetta. Suppone egli, ch'essa non differisce dall'unità, che di una frazione il di cui numeratore è l'unità, e il denominatore è il numero due inalzato ad una

Digitized by Google

potenza eguale al numero dei giorni trascorsi dell' epoca. Ma la vera maniera di rimontare dagli avvenimenti passati alla probabilità delle cagioni e degli avvenimenti futuri, era ignota a questo illustre scrittore.

CAP. III.

Della Speranza.

La probabilità degli avvenimenti serve a determinare la speranza o il timore delle persone interessate alla loro esistenza. Il vocabolo *speranza* ha diversi significati: esso esprime generalmente il vantaggio di colui che aspetta un bene qualunque in supposizioni che non sono se non che probabili. Questo vantaggio nella teoria degli azzardi è il prodotto della somma sperata moltiplicato per la probabilità di conseguirla: è la somma parziale che dee rivenire allorchè non voglion correrssi i rischi dell' avvenimento, supponendo che la ripartizione si faccia proporzionatamente alle probabilità. Questa ripartizione è la sola esatta allorchè si fa astrazione da tutte le circostanze estranee; perchè con un egual grado di probabilità, si ha un diritto eguale sulla somma sperata. Noi denomineremo questo vantaggio, *speranza matematica*.

Nono Principio.

Allorchè esso dipende da molti avvenimenti; ottiensi, prendendo la somma dei prodotti della probabilità di ciascun avvenimento pel bene legato al suo arrivo.

Applichiamo questo principio a degli esempj. Supponiamo che al giuoco di *capo croce*, Paolo riceve due franchi, s' egli riporta *croce* al primo colpo, e cinque franchi se non la riporta che al secondo. Moltiplicando due franchi per la probabilità $\frac{1}{2}$ del primo caso, e cinque franchi per la probabilità $\frac{1}{4}$ del secondo caso; la somma dei prodotti, o due franchi e $\frac{1}{4}$ sarà il vantaggio di Paolo. E' la somma ch' egli dee dare di avanzo a colui che gli ha fatto que-

Digitized by Google

sto vantaggio; imperochè per l' eguaglianza del giuoco la posta dev' essere eguale al vantaggio ch' esso procura.

Se Paolo riceve due franchi riportando *croce* al primo colpo, e cinque franchi riportandola al secondo colpo, sia che l' abbia o nò riportata al primo, allora la probabilità di riportar *croce* al secondo colpo essendo $\frac{1}{2}$, moltiplicando due franchi e cinque franchi per $\frac{1}{2}$, la somma di questi prodotti darà tre franchi e mezzo pel vantaggio di Paolo, e per conseguenza per la sua scommessa al giuoco.

Decimo Principio.

In una serie di avvenimenti probabili, di cui gli uni producono un bene, e gli altri una perdita; si avrà il vantaggio che ne risulta, facendo una somma dei prodotti della probabilità di ciascun avvenimento favorevole pel bene ch' esso procura; e sottraendo da questa somma quella dei prodotti della probabilità di ciascun avvenimento disfavorevole per la perdita che v' è annessa. Se la seconda somma è maggiore della prima, il beneficio addivien perdita, e la speranza si cambia in timore.

Nella condotta della vita deesi sempre fare in guisa che si eguagli almeno il prodotto del bene che si spera moltiplicato per la sua probabilità, al prodotto simile relativo alla perdita. Ma per pervenirvi è necessario di valutare esattamente i vantaggi, le perdite, e le loro probabilità rispettive. Vi bisogna perciò una grande giustezza di spirito, un tatto delicato, ed una grand' esperienza delle cose: bisogna saper guarentirsi dai pregiudizj, dalle illusioni del timore e della speranza, e da quelle idee false di fortuna e di felicità, di cui la maggior parte degli uomini lusingano il loro amor proprio.

L' applicazione dei principj precedenti alla seguente questione, ha molto esercitato i geometri. Paolo giuoca a *capo croce*, colla condizione di ricevere due franchi se

Digitized by Google

riporta *croce* al primo colpo ; quattro franchi se non la riporta che al secondo ; otto franchi se non la riporta che al terzo, e così di seguito. La sua scommessa al giuoco dev' essere, per l' ottavo principio, eguale al numero dei colpi ; in guisa che se la partita continua all' infinito, la scommessa dev' essere infinita. Intanto alcun uomo ragionevole non vorrebbe esporre a questo giuoco una somma anche modica, cinquanta franchi, per esempio. D' onde deriva quella differenza tra il risultamento del calcolo, e l' indicazione del senso comune ? Si riconosce ben presto che questa differenza dipende da ciò, che il vantaggio morale che un bene procura non è proporzionale a questo bene, e che deriva da mille circostanze sovente difficilissime a definire, ma delle quali la più generale e la più importante è quella della fortuna. E' visibile in effetti, che un franco ha molto più pregio per colui che non ne ha se non cento, che per un milionario. Nel bene sperato deesi dunque distinguere il suo valore assoluto dal suo valore relativo. Questo si regola su i motivi che lo fan desiderare ; mentre che il primo n' è indipendente. Non si può dare un principio generale per apprezzare questo valore relativo. Eccone intanto uno, proposto da Daniele Bernulli, e che può servire in molti casi.

Undecimo Principio.

Il valore relativo di una somma infinitamente piccola, è eguale al suo valore assoluto diviso pel bene totale della persona interessata. Ciò suppone che ogni uomo ha un bene qualunque, il di cui valore non può esser giammai supposto nullo. In effetti, quell' istesso che nulla possiede, dà sempre al prodotto del suo travaglio ed alle sue speranze un valore almeno eguale a ciò che gli è rigorosamente necessario per vivere.

Se al principio che abbiamo esposto si applica l' analisi ; ottiensi la regola seguente.

Digitized by Google

Designando coll' unità la parte della fortuna di un individuo, indipendente dalle sue aspettative; se si determinano i diversi valori che questa fortuna può ricevere in virtù di queste aspettative, e le loro probabilità; il prodotto di questi valori inalzati rispettivamente alle potenze indicate da queste probabilità, sarà la fortuna fisica che procurerebbe all' individuo il medesimo vantaggio morale ch' egli riceve dalla parte di sua fortuna presa per unità, e dalle sue aspettative; sottraendo dunque l' unità da questo prodotto, la differenza sarà l' accrescimento della fortuna fisica dovuto alle aspettative: noi chiameremo questo accrescimento, *speranza morale*. E' facile il vedere, ch' essa coincide colla speranza matematica, allorchè la fortuna presa per unità, diviene infinita per rapporto alle variazioni ch' essa riceve dalle aspettative. Ma allorchè queste variazioni sono una parte sensibile di questa unità, le due speranze possono differire sensibilissimamente fra loro.

Questa regola conduce a dei risultamenti uniformi al senso comune, che con un tal mezzo puossi valutare con qualche esattezza: Così nella questione precedente si trova, che se la fortuna di Paolo è di duecento franchi; egli non dee ragionevolmente mettere al giuoco più di nove franchi. La medesima regola conduce ancora a ripartire il pericolo sopra molte parti di un bene che si spera, più tosto che esporre interamente questo bene al medesimo pericolo. Ne risulta parimenti, che al giuoco il più eguale, la perdita è sempre relativamente più grande che il guadagno; imperochè il prodotto della fortuna presa per unità, aumentata dal guadagno e inalzata a una potenza eguale alla probabilità del guadagno, per questa unità diminuita della perdita, e inalzata ad una potenza eguale alla probabilità della perdita, è sempre minore della fortuna del giuocatore prima della sua messa a giuoco. Supponendo per esempio questa fortuna di cento franchi, e che il giuocatore n' esponе cinquanta al giuoco di *capo croce*; la sua fortuna

Digitized by Google

dietro la sua messa a giuoco, può essere in virtù della sua aspettativa, o di cento cinquanta franchi o solamente di cinquanta: la probabilità di ciascuno di questi due casi è $\frac{1}{2}$; questa fortuna è dunque per la regola precedente eguale alla radice quadrata del prodotto di cento cinquanta moltiplicato per cinquanta: essa è egualmente ridotta a ottantasette franchi, cioè che quest'ultima somma procurerebbe al giuocatore lo stesso vantaggio morale, che lo stato della sua fortuna dopo la posta. Il giuoco è dunque svantaggioso nel caso istesso in cui la posta è eguale al prodotto della somma sperata moltiplicato per la sua probabilità. Si può da ciò giudicare della immoralità dei giuochi nei quali la somma sperata è al di sopra di questo prodotto. Essi non per altro sussistono che per i falsi ragionamenti e per la cupidigia che fomentano, e che trascinando il popolo a sacrificare il suo necessario a delle speranze chimeriche di cui esso non è in istato di valutarne l'inverisimiglianza, sono la sorgente di una infinità di mali.

CAP. IV.

Dei Metodi analitici del Calcolo delle Probabilità.

L'applicazione dei principj che noi abbiamo esposti, alle diverse questioni delle probabilità, esige dei metodi la di cui ricerca ha dato origine a molti rami dell'analisi, e specialmente alla teoria delle combinazioni, e al calcolo delle differenze finite.

Se si forma il prodotto dei binomj, l'unità più una prima lettera, l'unità più una seconda lettera, l'unità più una terza lettera, e così di seguito fino a n lettere; sottraendo l'unità da questo prodotto sviluppato, si avrà la somma delle combinazioni di tutte queste lettere prese una per una, a due a due, a tre a tre, ec.: ciascuna combinazione avrà per coefficiente l'unità. Per avere il numero delle combina-

Digitized by Google

zioni di queste n lettere prese r a r, si osserverà che se si suppongono le lettere eguali fra loro, il prodotto precedente diverrà la potenza *nma* del binomio, uno più la prima lettera; e 'l numero delle combinazioni di n lettere prese r a r, sarà il coefficiente della potenza *rma* della prima lettera nello sviluppo di questo binomio; si avrà dunque questo numero, colla formula nota del binomio.

Se voglia aversi riguardo alla rispettiva situazione delle lettere, in ciascuna combinazione; si dee osservare, che aggiungendo una seconda lettera alla prima, si può situarla al primo e al secondo posto; il che offre due combinazioni. Se a queste combinazioni si aggiunge una terza lettera; si può dare in ciascuna combinazione il primo, il secondo, il terzo posto; il che forma tre combinazioni, relative a ciascuna delle due altre; in tutto, sei combinazioni. Da ciò è agevole il conchiudere, che il numero delle differenti disposizioni che si possono dare a r lettere, è il prodotto dei numeri dall' unità fino a r. Per aver riguardo alla situazione rispettiva delle lettere, bisogna dunque moltiplicare per questo prodotto il numero delle combinazioni di n lettere prese r a r; il che riviene a sopprimere il denominatore del coefficiente del termine del binomio, che esprime questo numero.

Supponiamo una lotteria composta di n numeri e che ne sorta r in ciascuna estrazione; si domanda la probabilità della sortita di s numeri dati in una estrazione. Per pervenirvi, si determinerà prima di tutto il numero delle combinazioni degli altri numeri presi r meno s, a r meno s; imperochè è chiaro, che aggiungendo le s numeri dati, a ciascuna di queste combinazioni, si avrà la somma di tutte le combinazioni di n lettera prese r a r, e nelle quali le s numeri dati entrano. Se si divide questo numero per quello delle combinazioni di tutte le lettere prese r a r: si avrà la probabilità domandata. Si trova parimenti, che questa probabilità è il rapporto del numero delle combinazioni di r let-

Digitized by Google

tere prese *s* a *s*, al numero delle combinazioni di *n* lettere prese *s* a *s*.

In conseguenza di questo teorema, si possono calcolare le probabilità della lotteria di Francia, e conchiuderne i suoi beneficj. Questa lotteria come si sa è composta di 90 numeri, cinque dei quali sortono in ciascuna estrazione. La probabilità della sortita di un dato estratto, in virtù di questo teorema è eguale a $\frac{5}{90}$ o $\frac{1}{18}$; la lotteria dunque per l'eguaglianza del giuoco dovrebbe allora rendere otto volte la posta. Il numero totale delle combinazioni a due a due di novanta numeri è 4005, e ne sortono dieci in ciascuna estrazione; così la probabilità della sortità di un ambo dato è $\frac{10}{4005}$; la lotteria dunque dovrebbe rendere quattro cento volte e mezzo la posta per un ambo preso. Similmente si trova, ch'essa dovrebbe rendere la posta 11748 volte per un terno, 511038 volte per un quaterno, e 43949268 volte per un quinterno. La lotteria è aliena dal procurare questi vantaggi ai giuocatori.

Supponiamo ancora in un' urna, *n* palle che si possono egualmente estrarre ad una ad una, a due a due, a tre a tre, ec.; si è fatta una di queste estrazioni, e si domanda la probabilità che il numero delle palle estratte e dispari. Segue da ciò che precede, che se si eleva il binomio, uno più uno, alla potenza *n*; i termini secondo, terzo, ec., esprimeranno i numeri delle combinazioni di *n* palle prese ad una ad una, a due a due, ec.; così la totalità delle combinazioni sarà la potenza *nma* di due, meno l'unità: la somma dei termini secondo, quarto, sesto. ec. dello sviluppo del binomio sarà il numero delle combinazioni dispari: essa sarà visibilmente la metà della differenza delle *nme* potenze dei binomj uno più uno, e uno meno uno; o la metà della *nma* potenza di due. Sottraendo l'unità da questa metà, si avrà il numero delle combinazioni pari; e dividendo questi due numeri di combinazioni per la loro somma, si avranno le

Digitized by Google

probabilità rispettive delle combinazioni dispari e pari. Si vede in tal modo che evvi del vantaggio a scommettere piuttosto per un numero dispari di palle estratte, che per un numero pari.

Ma il metodo il più generale e il più diretto di risolvere le questioni di probabilità, consiste nel farle dipendere da equazioni alle differenze. Paragonando gli stati consecutivi della funzione delle variabili, che esprime la probabilità, allorchè si fan crescere queste variabili, delle loro differenze rispettive; la questione proposta fornisce il più delle volte un rapporto semplicissimo tra i diversi stati di questa funzione. Questo rapporto è ciò che dicesi *equazione alle differenze finite ordinarie o parziali*; ordinarie, allorchè non avvi che una variabile; parziali, allorchè ve ne son molte. Diamone alcuni esempj.

Tre giuocatori le di cui forze sono supposte le medesime, giuocano insieme colle seguenti condizioni. Quello dei due giuocatori che guadagna il suo avversario, giuoca col terzo, e se egli guadagna, la partita è finita. Se è vinto, il vincitore giuoca coll' altro e così di seguito, finchè uno dei giuocatori abbia guadagnato consecutivamente i due altri, il che termina la partita. Si domanda la probabilità, che questa partita sarà finita in un dato numero di colpi. Cerchiamo prima di tutto la probabilità che la partita finirà precisamente ad un colpo determinato, per esempio, al decimo colpo. Perchè ciò nasca, il giuocatore che la guadagna dev' entrare in giuoco al nono colpo, e guadagnarlo del pari che il colpo seguente. Ma se in luogo di guadagnare il nono colpo, egli fosse vinto dal suo avversario, come questi ha di già guadagnato l' altro giuocatore, la partita finirà a questo colpo; così la probabilità che un giuocatore entrerà in giuoco al nono colpo, e che lo guadagnerà, è eguale a quella, che la partita finirà precisamente a questo colpo; e siccome questo giuocatore deve guadagnare il colpo seguente, acciò la partita si termini al decimo colpo, la

Digitized by Google

probabilità di quest' ultimo caso sarà la metà della precedente. Da ciò segue, che se si considera questa probabilità come una funzione del numero de' colpi al quale essa dee finire; questa funzione sarà la metà della stessa funzione nella quale si è diminuito il numero o la variabile di un' unità. Questa eguaglianza forma una di quelle equazioni che si denominano *equazioni alle differenze finite ordinarie.*

Con questo mezzo si può determinare facilmente la probabilità che la partita finirà precisamente ad un colpo qualunque. E' visibile, che la partita non può finire al più, che al secondo colpo; e perciò è necessario, che quello fra i due primi giuocatori che guadagna il suo avversario, guadagna al secondo colpo il terzo giuocatore. Così la probabilità che la partita finirà a questo secondo colpo è $\frac{1}{2}$. Da ciò si conchiude, in virtù dell' equazione, che le probabilità successive della fine della partita sono $\frac{1}{4}$ pel terzo colpo, $\frac{1}{8}$ pel quarto, ec. e generalmente $\frac{1}{2}$ inalzata ad una potenza minore dell' unità del numero del colpo. Or, se si prende la somma di tutte queste potenze dalla prima fino a quest' ultima inclusivamente, si avrà la probabilità che la partita sarà terminata nel numero dei colpi indicati da questo numero, eguale all' unità meno l' ultima di queste potenze di $\frac{1}{2}$.

Consideriamo ancora il primo problema che si abbia risoluto sulle probabilità, e che Pascal propose di risolvere a Fermat. Due giuocatori A e B, le di cui abilità sono eguali, giuocano insieme colla condizione che colui che il primo avrà vinto l' altro per un dato numero di volte, guadagnerà la partita, e prenderà la somma delle poste. Dopo alcuni colpi, i giuocatori stabiliscono di concerto di ritirarsi, senza aver terminata la partita; si domanda in qual modo essi debbon dividersi questa somma. E' visibile, che le loro parti debbono essere proporzionali alle loro probabilità rispettive di guadagnare la partita; la questione dunque si riduce a determinare queste probabilità. Esse dipendono evidentemen-

Digitized by Google

te dal numero dei punti che mancano a ciascun giuocatore per attendere il numero dato; così la probabilità di A è una funzione di questi due numeri che noi riguardiamo come tante variabili. Se i due giuocatori convenissero di giuocare un colpo di più (convenzione che non cambia in nulla la loro sorte); o A lo guadagnerebbe, ed in allora il numero dei punti che gli mancano, sarebbe diminuito di un' unità; o il giuocatore B guadagnerebbe questo nuovo colpo, ed in allora il numero dei punti che mancano a quest' ultimo giuocatore, sarebbe diminuito di un' unità, ma la probabilità di ciascuno di questi casi è $\frac{1}{2}$; la funzione cercata è dunque eguale alla metà di questa funzione in cui si diminuisce di un' unità la prima variabile, più alla metà della medesima funzione nella quale si diminuisce la seconda variabile, di un' unità. Questa eguaglianza è una di quelle equazioni che si denomina *equazioni alle differenze parziali*.

Col mezzo delle medesime si possono determinare le probabilità di A, partendo dai numeri più piccoli, ed osservando che la probabilità o la funzione che l' esprime, è eguale all' unità, allorchè al giuocatore A non manca alcun punto, o quando la primo variabile è nulla; e questa funzione addiviene nulla col secondo variabile. Supponendo ancora che al giuocatore A non manchi che un punto, si trova che la sua probabilità è $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, ec, secondo che a B manca uno, due o tre punti. Generalmente, essa è in allora eguale all' unità, meno $\frac{1}{2}$ inalzata ad una potenza eguale al numero dei punti che mancano a B. Si supporrà in seguito che al giuocatore A manchino due punti, e si troverà la sua probabilità eguale ad $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ec, secondo che a B manca un punto, due, tre ec. Si supporrà ancora che al giuocatore A manchino tre punti, e così di seguito.

Questa maniera di ottenere i valori successivi di una quantità, col mezzo della sua equazione alle differenze, è lunga

Digitized by Google

e faticosa; e i geometri han cercato dei metodi per avere la funzione generale delle variabili, che soddisfa a questa equazione, in guisa che non si abbia bisogno per ciascun caso particolare, se non che di sostituire in questa funzione, i valori corrispondenti delle variabili. Consideriamo quest' oggetto di una maniera generale. Per far ciò, supponiamo una serie di termini disposti sopra una linea orizzontale, e tale che ciascuno di essi derivi dai precedenti, secondo una data legge: concepiamo questa legge espressa da una equazione tra molti termini consecutivi, e il loro indice, o il numero che indica il posto ch' essi occupano nella serie: questa equazione è quella a cui ho dato la denominazione di *equazione alle differenze finite ad un solo indice variabile*. L' ordine o il grado di questa equazione è la differenza del posto dei suoi due termini estremi. Col mezzo della medesima si possono determinare successivamente i termini della serie e continuarli indefinitivamente; ma per far ciò bisogna conoscere un numero di termini della serie, eguale al grado dell' equazione. Questi termini sono i costanti arbitrarj dell' espressione del termine generale della serie, o dell' integrale dell' equazione alle differenze.

Or supponiamo, al di sopra dei termini della serie precedente, una seconda serie di termini disposti orizzontalmente; concepiamo ancora, al di sotto dei termini della seconda serie, una terza serie orizzontale, e così di seguito all' infinito, e supponiamo i termini di tutte queste serie, legati da una equazione generale, fra molti termini consecutivi, presi tanto nel senso orizzontale che nel senso verticale, e i numeri che indicano il loro posto nei due sensi. Questa equazione da me si denomina *equazione alle differenze finite parziali a due indici variabili*.

Immaginiamo similmente al di sopra del piano che contiene le serie precedenti, un secondo piano contenente serie simili, i di cui termini sieno situati rispettivamente al di sopra di quelli che contiene il primo piano. Supponiamo in

Digitized by Google

seguito al di sopra di questo secondo piano, un terzo piano contenente serie simili, e così all' infinito. Supponiamo tutt' i termini di queste serie, legati da una equazione tra molti termini consecutivi, presi tanto nel senso della lunghezza, che nel senso della larghezza e della profondità, e i tre numeri che indicano il loro posto in questi tre sensi. Questa equazione è quella che io chiamo *equazione alle differenze finite parziali a tre indici variabili.*

Finalmente, considerando la cosa di una maniera astratta ed indipendente dalle dimensioni dello spazio, supponiamo generalmente un sistema di grandezze che sieno funzioni di un numero qualunque d' indici variabili, e concepiamo tra queste grandezze, le loro differenze relative a quest' indici e gl' indici istessi, tante equazioni quante di questa grandezze vi sono; queste equazioni saranno alle differenze finite parziali ad un numero qualunque d' indici variabili.

Col loro mezzo si possono determinare successivamente queste grandezze. Ma non altrimenti che l' equazione ad un solo indice, esige che si conosca un certo numero di termini della serie; così del pari l' equazione a due indici esige che si conoscano una o più linee di serie, ciascuno dei di cui termini generali possono essere espressi da una funzione arbitraria di uno degl' indici. Similmente l' equazione a tre indici esige che si conoscano uno o molti piani di serie, i di cui termini generali possono essere espressi ciascuno da una funzione arbitraria di due indici, e così di seguito. In tutti questi casi, con delle eliminazioni successive, si potrà determinare un termine qualunque di serie. Ma tutte l' equazioni fra le quali si elimina, essendo comprese in un medesimo sistema di equazioni generali, tutte l' espressioni dei termini successivi che ottengonsi con queste eliminazioni, debbono esser comprese in una espressione generale, funzione degl' indici che determinano il posto del termine. Questa espressione è l' integrale dell' equazione pro-

Digitized by Google

posta alle differenze, e la sua ricerca è l'oggetto del calcolo integrale.

Taylor è il primo che nella sua eccellente opera intitolata *Methodus Incrementorum*, abbia considerato l'equazioni lineari alle differenze finite. Egli vi dà la maniera d'integrare quelle del prim'ordine, con un coeficiente variabile, ed un ultimo termine funzione dell'indice. Per verità, le relazioni dei termini delle progressioni aritmetiche e geometriche, sono i casi i più semplici dell'equazioni lineari alle differenze; ma non si erano riguardate sotto questo punto di vista, uno di quelli che si riattacca a teorie generali, che han condotto a queste teorie, e che sono perciò tante vere scoperte.

Verso il medesimo tempo, Moivre considerò sotto la denominazione di *serie ricorrenti*, l'equazioni lineari alle differenze finite, di un ordine qualunque, a coeficienti costanti: egli perveime ad integrarle in una maniera ingegnosissima. Com'è sempre interessante il seguire l'andamento degl'inventori, io vado ad esporre quello di Moivre, applicandolo ad una serie ricorrente la di cui relazione tra tre termini consecutivi è data. Prima di tutto egli considera la relazione tra i termini consecutivi di una progressione geometrica, o l'equazione a due termini, che l'esprime. Rapportandola ai termini inferiori di un'unità, egli la moltiplica in questo stato, con un fattore costante, e sottrae il prodotto dall'equazione primitiva. Con ciò egli ottiene una relazione tra tre termini consecutivi della progressione geometrica. Moivre considera in oltre una seconda progressione geometrica di cui la ragione dei termini è lo stesso fattore che ha impiegato. Diminuisce similmente di un'unità l'indice dei termini dell'equazione di questa nuova progressione: in questo stato, egli la moltiplica per la ragione dei termini della prima progressione, e sottrae il prodotto dalla equazione primitiva; il che gli dà tra tre termini consecutivi della seconda progressione, una relazione

Digitized by Google

intieramente simile a quella ch' egli ha trovato per la prima progressione. Dopo ciò osserva, che se si aggiungono termine a termine, le due progressioni; la medesima relazione sussiste tra tre qualsivogliano di queste somme consecutive. Egli paragona i coeficienti di questa relazione, a quelli della relazione dei termini della série ricorrente proposta; e per determinare i rapporti dei termini consecutivi delle due progressioni, trova una equazione di secondo grado, le di cui radici sono questi rapporti. Per ciò Moivre decompone la serie ricorrente, in due progressioni geometriche, moltiplicate ciascuna per un costante arbitrario che egli determina col mezzo dei due primi termini della serie ricorrente. Questo metodo ingegnoso è in sostanza quello che Lagrange ha di poi impiegato per l' integrazione diretta dell' equazioni lineari alle differenze finite a coeficienti costanti.

Dopo quest' epoca io ho considerato l' equazioni lineari alle differenze parziali finite, prima sotto la denominazione di *serie ricorrenti*, e quindi sotto la loro denominazione propria. La maniera la più generale e la più semplice d' integrare tutte queste equazioni, mi sembra esser quella che ho fondato sulla considerazione delle funzioni generatrici, di cui eccone l' idea.

Se si concepisce una funzione A di una variabile, sviluppata in una serie ascendente per rapporto alle potenze di questa variabile, il coeficiente di una qualunque di queste potenze, sarà funzione dell' esponente o indice di questa potenza. A è che io chiamo *funzione generatrice* di questo coeficiente o della funzione dell' indice.

Or, se si moltiplica la serie A, per una funzione lineare della variabile, come, per cagion d' esempio, l' unità più due volte questa variabile; il prodotto sarà una nuova funzione generatrice nella quale il coeficiente di una potenza qualunque della variabile sarà eguale al coeficiente della medesima potenza in A, più al doppio del coeficiente della

Digitized by Google

potenza inferiore di un' unità. Così la funzione dell' indice, nel prodotto, eguaglierà la funzione dell' indice in A, più il doppio di questa medesima funzione nella quale l' indice è diminuito dell' unità. Questa funzione dell' indice nello sviluppo del prodotto, è parimenti un derivativo della funzione dell' indice in A, derivativo che si può esprimere con una caratteristica situata avanti a quest' ultima funzione. La derivazione indicata dalla caratteristica, dipende dalla funzione moltiplicatice, che designeremo con B, e che supporremo sviluppata, come A, per rapporto alle potenze della variabile.

Se si moltiplica di nuovo per B il prodotto di A per B, il che significa moltiplicare A per il quadrato di B, si formerà una terza funzione generatrice nella quale il coeficiente di una potenza qualunque della variabile, sarà un derivativo simile del coeficiente corrispondente dell' ultimo prodotto; potrassi dunque esprimerlo coll' istessa caratteristica situata avanti al derivativo precedente, ed in allora questa caratterisca sarà due volte scritta avanti al coeficiente corrispondente della serie A. Ma in luogo di scriverla due volte, le si dà per esponente il numero due.

Continuando così, si vede generalmente che se si moltiplica A per la potenza nma (a) di B; si avrà il coeficiente di una

(a) Avvertimento. La scrupolosità che il calcolo esige mi ha messo finalmente nella necessità di avvertire i lettori, che siccome per questa edizione italiana il tipografo ha voluto adoperare un carattere assai minuto, così l' espressioni delle potenze nme o $n^{I}me$ potranno esser prese in un altro senso da coloro che non hanno l' occhio esercitato abbastanza per distinguere fra due caratteri minuti qual' è il più minuto; essendo più probabile che i due caratteri, cioè quello adoperato per n e quell' altro per me sieno presi per gli stessi. Non è però così. Il carattere dell' n, quando vogliasi attentamente considerare, è più grande di quello del me o ma, e questo me o ma è situato alquanto più sopra dell' n. Così quando trovasi scritto nme o nma o $n^{I}ma$, si dee supporre come se fosse scritto N^{ma}, o N^{me}, o N^{Ima}, o N^{Ime}, ec.

Digitized by Google

potenza qualunque della variabile nel prodotto, situando avanti al coeficiente corrispondente di A, la caratteristica di *n* per esponente.

Supponiamo che B sia l'unità divisa dalla variabile; in allora nel prodotto di A moltiplicata per B, il coeficiente di una potenza della variabile, sarà il coeficiente della potenza superiore di un' unità, in A; dal che ne segue, che nel prodotto di A per la potenza *nma* di B, questo coeficiente sarà quello della potenza superiore di un numero *n* di unità, in A.

Designiamo con C, l'unità divisa dalla variabile, meno uno; in allora nel prodotto di A per C, il coeficiente di una potenza della variabile, sarà il coeficiente della potenza superiore di un' unità in A, meno il coeficiente di questa potenza nella medesima serie A; sarà dunque la differenza finita di quest' ultimo coeficiente, nel quale si fa variar l'indice, dell' unità. Così nel prodotto di A per la *nma* potenza di C, il coeficiente sarà la differenza *nma* del coeficiente corrispondente di A.

B essendo quì eguale all' unità più C; la potenza *nma* di B è identicamente eguale alla medesima potenza del binomio, uno più C. Moltiplicando dunque per A queste due potenze; i due prodotti saranno identici. Or nel prodotto di A per la potenza *nma* di B, il coeficiente di una potenza qualunque della variabile, è, come si è veduto, il coeficiente della potenza superiore di *n* unità in A; è dunque la funzione dell' indice aumentato del numero *n*. Nel prodotto di A per lo sviluppo del binomio, uno più C; si avranno, per ciò che precede, i coeficienti corrispondenti, scrivendo in vece dei prodotti di A per le potenze successive di C, le differenze successive della funzione dell' indice in A, e moltiplicando per questa funzione, il termine indipendente di C. Si avrà dunque una funzione qualunque dell' indice aumentato dell' indeterminata *n*, espressa dai coeficienti dei termini dello sviluppo della potenza *nma* del bi-

Digitized by Google

nomio uno più uno, moltiplicati rispettivamente per la stessa funzione e sue differenze successive; il che dà l' interpolazione delle serie, col mezzo delle differenze dei loro termini successivi. Supponendo dunque che la serie A, come la differenza seconda, per esempio, dei suoi coeficienti, sia nulla; l' espressione precedente della funzione dell' indice aumentata dall' indeterminata n, si arresterà dietro i due suoi primi termini, e conterrà come arbitrarj indipendenti di questa indeterminata, i valori della funzione e della sua prima differenza, allorchè l' indeterminata è nulla. Avrassi parimenti l' integrale dell' equazione alle differenze finite, data per l' eguaglianza a zero, della differenza seconda della funzione dell' indice.

La funzione generatrice della differenza *nma* del coeficiente di A, essendo il prodotto di A per la potenza *nma* di C; se questo prodotto si disegna con A^x, A sarà la funzione generatrice delle integrali *nme* di A^x, astrazion facendo delle costanti arbitrarie che le integrazioni introducono. A essendo A^x divisa per la potenza *nma* di C, si vede che la funzione generatrice delle differenze si cambia nella funzione generatrice delle integrali, col rendere negativo l' esponente della potenza di C. Questa corrispondenza serve di fondamento all' analogia osservata tra le potenze positive e le differenze, e tra le potenze negative e le integrali.

B essendo sempre l' unità divisa per la variabile, e D una funzione razionale ed intera di questo quoziente, funzione, che per rendere semplice, supponiamo di secondo grado; si avrà il quadrato di B, eguale ad una funzione di B e di D, nella quale B non sarà che al primo grado. Moltiplicando per B i due membri di questa eguaglianza, ed eliminando dal secondo membro il quadrato di B mediante la sua espressione; si avrà la terza potenza di B, espressa da una funzione di B e di D, la quale non conterrà ancora che la prima potenza di B. Continuando in tal modo, perverrassi ad esprimere la potenza *nma* di B con

Digitized by Google

una funzione somigliante. D' altronde l' analisi fornisce per quest' oggetto dei mezzi generali e semplici. Or che questa potenza e la sua espressione si moltiplica per A, e che si ripassa dalle funzioni generatrici ai loro coeficienti; il coeficiente di una potenza qualunque della variabile, nel prodotto di B per la *nma* potenza di B, sarà, come si è visto, quello di A, nel quale l' indice è aumentato del numero *n*. Il coeficiente della medesima potenza, relativo al termine indipendente di B e di D, sarà il prodotto di questo termine pel coeficiente di A. Il coeficiente del prodotto di A per D, sarà un derivativo del coeficiente di A, derivativo che noi designeremo con una nuova caratteristica situata avanti a questo coeficiente. Il coeficiente del prodotto di A per una potenza di D, sarà espresso da questa caratteristica affettata dall' esponente della potenza e situata avanti al coeficiente di A. Finalmente, il coeficiente del prodotto di A per B e per una potenza di D, si esprimerà col situare questa caratteristica affettata dall' esponente della potenza, avanti al coeficiente di A, nel quale l' indice si aumenta di un' unità. Si avrà parimente la funzione dell' indice aumentata di una indeterminata *n*, espressa in una serie ordinata per rapporto alle potenze della caratteristica dipendente da D. Questa espressione, ch' è una generalizzazione dell' espressione precedente in differenze finite, sarà di tanto più convergente, di quanto i coeficienti di A si approssimeranno più a soddisfare alle relazioni rappresentate dall' eguaglianza a zero, delle potenze della caratteristica. L' eguaglianza a zero, della sua prima potenza, renderà nulle le potenze seguenti; e l' espressione precedente sarà l' integrale completa dell' equazione alle differenze finite lineari, che questa eguaglianza rappresenta.

Concepiamo intanto che A sia una funzione di due variabili (ciò che andiamo a dire, estendesi ad un numero qualunque di variabili). Sviluppandola in una serie ordinata per rapporto alle potenze di queste variabili ed ai loro pro-

Digitized by Google

detti ; il coeficiente del prodotto di due potenze qualunque in questo sviluppo, sarà una funzione degl' indici di queste potenze, di cui A sarà la funzione generatrice.

Se si moltiplica A per una funzione lineare delle due variabili, come per esempio, l' unità più due volte la prima variabile, meno tre volte la seconda ; il prodotto sarà una nuova funzione generatrice nella quale il coeficiente del prodotto di due potenze qualunque della variabile, sarà eguale al coeficiente del prodotto delle medesime potenze in A, più al doppio di questo medesimo coeficiente nel quale si diminuisce di un' unità, l' indice della prima variabile, meno al triplo del medesimo coeficiente nel quale l' indice della seconda variabile è diminuito di un' unità. Questo nuovo coeficiente potrassi esprimere ancora con una caratteristica situata avanti al coeficiente di A. Questa caratteristica dipenderà dal moltiplicatore di A, moltiplicatore che noi designeremo con B. Si vedrà come di sopra, che il coeficiente corrispondente nel prodotto di A per una potenza qualunque di B, sarà espressa da questa caratreristica sempre situata avanti al coeficiente di A, ed alla quale si dà per esponente, quello della potenza di B. Da ciò risultano alcuni teoremi analoghi a quelli che sono relativi ad una sola variabile. In simil modo si potrà sviluppare una funzione qualunque di due indici aumentati rispettivamente di due inderminate n e n, in una serie ordinata per rapporto alle potenze di una caratteristica. Mostriamolo con un esempio.

Supponiamo che B sia l' unità divisa dalla prima variabile ; che B^2 sia l' unità divisa dalla seconda variabile ; e che C sia eguale a B meno un multiplice di B^2, meno un costante. La potenza nma di B sarà la medesima potenza del trinomio, C più questo multiplice di B^2 più questo costante; il prodotto di A per le potenza n_{ma} di B e per la potenza $n^2 ma$ di B^2, è dunque identicamente eguale al prodotto di A, per lo sviluppo delle potenza nma di questo trinomio,

Digitized by Google

e per la potenza $n^{z}m a$ di B^{z}. Ripassiamo ora dalle funzioni generatrici, ai loro coeficienti. Il coeficiente del prodotto di due potenze qualunque di due variabili, in A moltiplicata per la $m a$ potenza di B, e per la $n^{z}m a$ potenza di B^{z}, sarà il coeficiente simile di A, nel quale gl' indici delle due variabili sono rispettivamente aumentati delle indeterminate n e nz. Il medesimo coeficiente nel prodotto di A per una potenza di B^{z}, è il coeficiente di A, nel quale l'indice della seconda variabile è aumentata dall' esponente di questa potenza. In fine questo coeficiente nel prodotto di A per una potenza di B^{z} e per una potenza di C, è il coeficiente di A nel quale l'indice della seconda variabile è aumentato dell' esponente della potenza di B^{z} ed avanti il quale si situa la caratteristica relativa a C, affettata dall' esponente della potenza di C. Si avrà parimente una funzione di due indici aumentati rispettivamente dalle indeterminate n e nz, espressa in una serie di termini dipendente dalla medesima funzione nella quale il secondo indice è soltanto aumentato, e dai termini simili precedenti delle potenze successive della caratteristica. Se i coeficienti di A rendono nulla la funzione indicata da questa caratteristica; si avrà l' integrale della equazione lineare alle differenze parziali, che rappresenta questa eguaglianza a zero, integrale che conterrà una funzione arbitraria dell' indeterminata n.

Ritorniamo ora alle funzioni generatrici ad una sola variabile, e rappresentiamole sempre con A. Supponendo B, funzione di questa variabile, e C un' altra funzione della medesima variabile; si potrà considerare B come una funzione di C, sviluppata in una serie ordinata per rapporto alle potenze di C. Il prodotto di A per questa serie, sarà dunque identicamente eguale al prodotto di A per B; ed i coeficienti di una medesima potenza della variabile saranno identicamente eguali in questi due prodotti. Ma nel prodotto di A per B, questo coeficiente è quello di A, affettato di una ca-

Digitized by Google

ratteristica relativa a B. Nel prodotto dello sviluppo dell'espressione di B ordinata per rapporto a C, il coeficiente di una potenza qualunque di C è il coeficiente di A affetto da una nuova caratteristica relativa a C, e 'l di cui esponente è quello di questa potenza, scrivendo semplicemente il coeficiente di A, allorchè questo esponente è nullo; si avrà dunque l'espressione di un derivativo indicato da una prima caratteristica, in una serie ordinata secondo gli esponenti di una nuova caratteristica. Si vede, che per formare questa serie, cioè per ripassare dalle funzioni generatrici ai loro coeficienti, basta sostituire in B considerata come funzione di C, la nuova caratteristica, al sito di C; sviluppare questa espressione di B, in una serie ordinata per rapporto alle potenze di questa caratteristica; e finalmente, scrivere il coeficiente di una potenza indeterminata della variabile in A, in continuazione di ciascuna potenza della caratteristica e dopo il primo termine della serie. Così, questo coeficiente essendo una funzione qualunque dell'indice della variabile; la trasformazione di un derivativo di questa funzione, indicata da una prima caratteristica, in una serie ordinata per rapporto agli esponenti successivi della caratteristica d'un nuovo derivativo della medesima funzione, si riduce allo sviluppo delle funzioni, in serie.

Supponiamo B eguale all'unità divisa dalla variabile, meno uno, e C eguale all'unità divisa dalla potenza *i* della variabile, meno uno; la potenza *nma* di C sarà eguale allo sviluppo della potenza *nmi* della quantità (uno più B, inalzato alla potenza *i*, meno uno). Moltiplicando queste due potenze *nmi* per A, ripassando dalle funzioni generatrici ai loro coeficienti, il coeficiente relativo al prodotto di A per la potenza *nma* di C, sarà la differenza finita *nma* del coeficiente corrispodente in A, variando l'indice di *i* unità. Il coeficiente simile del prodotto di A per una potenza di B, sarà la differenza finita dell'ordine di questa potenza, del coeficiente di A, variando l'indice dell'unità; si avrà dunque

Digitized by Google

parimente la differenza finita n^{ma} di una funzione dell' indice variante di i unità, in serie di differenze della medesima funzione dell' indice variante di una unità. In questa espressione, le differenze potranno cangiarsi in integrali, col farvi n negativo.

Vedesi in tutto ciò che abbiam detto, che le operazioni algebraiche, relative alle trasformazioni delle funzioni, si trasportano alle caratteristiche, dando loro per esponenti quelle quantità che le corrispondono.

Se in una funzione di un indice variante dell' unità, si fa quest' indice eguale ad un altro indice moltiplicato per una costante, la variazione di questo nuovo indice sarà questa costante istessa. Le formule relative alle funzioni di cui l' indice varia dell' unità, si trasformeranno parimenti in altre relative alle funzioni di cui l' indice varia di una costante qualunque.

Supponendo infinitamente piccoli gl' incrementi degl' indici, o gli uni finiti, e gli altri infinitamente piccoli; i risultamenti relativi ai loro accrescimenti finiti sussisteranno sempre, e si renderanno più semplici rigettando gl' infinitamente piccoli di un ordine superiore a quello che si conserva. Questi passaggi dal finito all' infinitamente piccolo, hanno il vantaggio di chiarificare i punti delicati dell' analisi infinitesimale, che sono stati l' oggetto delle grandi discussioni fra i geometri. In tal guisa io ho dimostrato la possibilità d' introdurre le funzioni discontinue, nelle integrali dell' equazioni alle differenze parziali; purchè la discontinuità non abbia luogo che per le differenziali delle funzioni, dell' ordine di queste equazioni. I risultamenti trascendenti del calcolo, come tutte le astrazioni dell' intendimento, sono de' segni generali di cui non si può conoscere la vera estensione, se non che rimontando coll' analisi metafisica, alle idee elementari che vi han condotto; il che spesso presenta delle grandi difficoltà; imperochè lo spirito umano soffre meno a portars' innanzi, che a ripiegarsi sopra se stesso.

Digitized by Google

Il passaggio dall' infinito all' infinitamente piccolo, spande un gran lume sulla metafisica del calcolo differenziale. Con questo passaggio si vede chiaramente, che il calcolo non è in sostanza se non il paragone dei coeficienti delle medesime potenze delle differenziali nello sviluppo in serie, di funzioni identicamente eguali degl' indici aumentati rispettivamente di differenziali indeterminate. Le quantità che si trascurano come infinitamente piccole d' un ordine superiore a quello che si conserva, e che per tale omissione sembran togliere a questo calcolo il rigor dell' algebra, altro non sono, che potenze di queste differenziali, superiori alle potenze di cui si paragonano i coeficienti, e che per ciò debbono essere rigettate in questo paragone; in guisa che il calcolo differenziale ha tutta l' esattezza delle altre operazioni algebraiche. Ma nelle sue applicazioni alla geometria e alla meccanica, è indispensabile d' introdurre il principio dei limiti. Per esempio, la sottangente di una curva essendo il limite geometrico della sotto-segante, o la linea di cui questa approssima incessantemente, a misura che i punti d' intersezione della segante colla curva si ravvicinano; l' espressione analitica della sottangente deve essere similmente il limite dell' espressione analitica della sotto segante; essa è eguale per conseguenza al primo termine di quest' ultima espressione sviluppata secondo le potenze dell' intervallo che separa le ordinate dei due punti d' intersezione.

La tangente si può ravvisare ancora come la retta la di cui equazione si avvicina il più al punto di contingenza, che quella della curva. L' ordinata di questa curva essendo una funzione dell' ascissa; se a partire da questo punto, si fa crescere l' ascissa, di una quantità indeterminata, secondo le potenze della quale la funzione sia sviluppata; è visibile che la somma dei due primi termini di questo sviluppo sarà l' ordine della retta la più approssimativa alla curva; essa sarà conseguentemente l' ordinata della tangente; e il coeficiente dell' indeterminata nel secondo termine esprimerà

Digitized by Google

il rapporto dell' ordinata alla sottagente. Col principio dei limiti è facile il provare, che ogni altra retta tirata dal punto di contingenza, entrerebbe nella curva vicina a questo punto.

Questa maniera singolarmente felice di giungere all' espressione delle sottangenti, è dovuta a Fermat, il quale l' ha esteso alle curve trascendenti. Questo gran geometra esprime colla caratteristica E, l' accrescimento dell ascissa, e non considerando che la prima potenza di questo accrescimento, determina esattamente, come si fa col calcolo differenziale, le sottangenti delle curve, i loro punti d' inflessione, la *maxima* e *minima* delle loro ordinate, e generalmente quelli delle funzioni razionali. Dalla sua bella soluzione del problema della rifrazione della luce, inserita nella *Recueil des Lettres de Descartes*, si vede, ch' egli sapeva estendere il suo metodo alle funzioni irrazionali, sbarazzandosi dalle irrazionalità, colla elevazione dei radicali a potenze. Fermat dee dunque riguardarsi come il vero inventore del calcolo differenziale. Newton ha reso in seguito questo calcolo più analitico, nel suo Metodo delle Flussioni; e ne ha reso più semplice e più generale il metodo, col suo bel teorema del binomio. Finalmente, quasi nel tempo istesso, Leibnitz ha arricchito il calcolo differenziale di una notazione la quale nell' indicare il passaggio del finito all' infinitamente piccolo, riunisce al vantaggio di esprimere i risultamenti generali di questo calcolo, quello di dare i primi valori approssimativi delle differenze e delle somme delle quantità; notazione che si è adattata da se stessa al calcolo delle differenziali parziali.

Soventi volte si è condotto a delle espressioni che contengono tanti termini fattori, quante sostituzioni numeriche vi sono impraticabili. Ciò ha luogo nelle questioni di probabilità, quando si prende in considerazione un gran numero di avvenimenti. Intanto, importa allora di avere il valore numerico delle formule, per conoscere con quale probabilità

Digitized by Google

sono indicati i risultamenti che gli avvenimenti sviluppano allorchè si moltiplicano. Importa sopra tutto di avere la legge secondo la quale questa probabilità si avvicina incessantemente alla certezza ch'essa finirebbe per cogliere, se infinito divenisse il numero degli avvenimenti. Per pervenirvi, io considero che le integrali definite di differenziali moltiplicate con fattori inalzati a grandi potenze, danno coll'integrazione, alcune formule composte di un gran numero di termini e di fattori. Questa osservazione mi fece nascere l'idea di trasformare in simili integrali l'espressioni complicate dell'analisi, e le integrali dell'equazione alle differenze. Io ho eseguito ciò con un metodo che dà contemporaneamente la funzione compresa sotto il segno integrale, e i limiti della integrazione. Essa offre ciò di rimarchevole, cioè che questa funzione è la funzione istessa generatrice dell'espressioni e dell'equazioni proposte; il che riattacca questo metodo alla teoria delle funzioni generatrici, di cui essa è altresì il complemento. Io ho ottenuto ciò con un metodo che fa convergere la serie, con tanta maggior rapidità, quanto più è complicata la formula ch'essa rappresenta, in modo che un tal metodo è tanto più esatto, quanto più addiviene necessario. Il più delle volte la serie ha per fattore la radice quadrata del rapporto della circonferenza al diametro: delle volte essa dipende da altre trascendenti il di cui numero è infinito.

Un'importante osservazione che dipende dalla grande generalità dell'analisi, e che permette di estendere questo metodo alle formule ed alle equazioni a differenze, che la teoria delle probabilità presenta con molta frequenza, è, che le serie alle quali si perviene, supponendo reali e positivi i limiti delle integrali definite, hanno egualmente luogo nel caso in cui l'equazione che determina questi limiti, non ha che radici negative o immaginarie. Questi passaggi da positivo a negativo, e dal reale all'immaginario, di cui io sono stato il primo a farne uso, mi han condotto ancora ai

Digitized by Google

valori di molte integrali definite, che in seguito ho dimostrato direttamente. Questi passaggi si possono dunque considerare come tanti mezzi di scoperte, simili all' induzione ed all'analogia, impiegati da lungo tempo dai geometri, prima con un' estrema riserba, quindi con una intera confidenza, essendone stato giustificato l' impiego da un gran numero di esempj. E' sempre necessario intanto di confermare con dimostrazioni dirette i risultamenti ottenuti da questi diversi mezzi.

Io ho nominato *calcolo delle funzioni generatrici*, l'insieme dei metodi precedenti: questo calcolo serve di fondamento all' opera che ho pubblicato sotto il titolo. *Théorie analytique des Probabilités.* Esso si riattacca all' idea semplice che ebbe Cartesio, d' indicare le moltiplicazioni ripetute di una quantità per se stessa, o le sue potenze intere e positive, scrivendo verso l' alto della lettera che l' esprime, i numeri che marcano i gradi di queste potenze. Questa notazione sembra essere una cosa da nulla. Ma il linguaggio dell' analisi, il più perfetto di tutti, essendo di per se stesso un possente istrumento di scoperte; le sue notazioni, allorchè son necessarie e felicemente immaginate, sono tanti germi di nuovi calcoli: il che vien reso sensibile da questo esempio:

Wallis che nella sua opera intitolata *Arythmetica infinitorum*, uno di quei che han maggiormente contribuito ai progressi dell' analisi, si è specialmente attaccato a seguire il filo dell' induzione e dell' analogia, considerò che se si divide l' esponente di una lettera, per due, tre, ec.; il quoziente, secondo la notazione cartesiana, e quando la divisione è possibile, sarà l' esponente della radice quadrata, cubica, ec., della quantità che rappresenta la lettera inalzata all' esponente dividendo. Estendendo per analogia questo risultamento al caso in cui la divisione non è possibile; egli considerò una quantità inalzata ad un esponente frazionario, come la radice del grado indicato dal denominatore

di questa frazione, della quantità inalzata alla potenza indicata dal numeratore. Egli osservò inoltre, che secondo la notazione cartesiana, la moltiplicazione di due potenze di una medesima lettera riviene ad aggiungere i loro esponenti; e che la loro divisione riviene a sottrarre l' esponente della potenza divisore, di quella della potenza dividendo, allorchè il secondo di questi esponenti sorpassa il primo. Wallis estese questo risultamento al caso in cui il primo esponente eguaglia o sorpassa il secondo; il che rende la differenza, nulla o negativa. Suppose egli dunque, che un esponente negativo indica l' unità divisa dalla quantità inalzata al medesimo esponente preso positivamente. Queste osservazioni lo condussero ad integrare generalmente le differenziali monomj; d' onde conchiuse le integrali definite di un genere particolare di differenziali binomj il di cui esponente è un numero intero positivo. Osservando in seguito la legge dei numeri che esprimono queste integrali; una serie d' interpolazioni e d' induzioni felici, ove si scorge il germe del calcolo delle integrali definite, che ha tanto esercitato i geometri, e l' una delle basi della mia nuova teoria delle probabilità, gli diede il rapporto della superficie del circolo al quadrato del suo diametro, espresso da un prodotto infinito, che quando si sospende, rinchiude questo rapporto in limiti sempre più ravvicinati; risultamento de' più singolari dell' analisi. Ma è osservabile, che Wallis, il quale avea sì ben considerato gli esponenti frazionarj delle potenze radicali, abbia continuato a notare queste potenze come si era fatto prima di lui. Newton, se non m' inganno, fu il primo ad impiegare, nelle sue lettere a Oldembourg, la notazione di queste potenze, con esponenti frazionarj. Paragonando colla via dell' induzione di cui Wallis avea fatto un sì bell' uso, gli esponenti delle potenze del binomio, coi coefficienti dei termini del suo sviluppo, nel caso in cui questo esponente è intero e positivo; egli determinò la legge di questi coefficienti, e l' estese per analogia alle potenze fra-

Digitized by Google

zionarie e negative. Questi diversi risultamenti fondati sulla notazione di Cartesio, mostrano la sua influenza su i progressi dell' analisi. Essa ha anche il vantaggio di dare l'idea la più giusta de' logaritmi, che in effetti non sono se non gli esponenti di una grandezza, le di cui potenze successive, nel crescere per gradi infinitamente piccoli, possono rappresentare tutt' i numeri.

Ma l'estensione la più importante che questa notazione abbia ricevuto, è quella degli esponenti variabili; il che costituisce il calcolo esponenziale, uno dei rami i più fecondi dell' analisi moderna. Leibnitz è stato il primo ad indicare le trascendenti ad esponenti variabili, e con ciò ha egli completato il sistema degli elementi di cui una funzione finita può essere composta; imperochè ogni funzione finita esplicita di una variabile, si riduce in ultima analisi a grandezze semplici, combinate per via di addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione, ed inalzate a potenze costanti o variabili. Le radici dell' equazioni formate da questi elementi, sono funzioni implicite della variabile. Ecco perchè una variabile avendo per logaritmo l' esponente della potenza che l' è eguale nella serie delle potenze del numero di cui il logaritmo iperbolico e' l' unità; il logaritmo di una variabile n' e' una funzione implicita.

Leibnitz immaginò di dare alla sua caratteristica differenziale, i medesimi esponenti che alle grandezze; ma in allora questi esponenti in vece d' indicare le moltiplicazioni ripetute di una medesima grandezza, indicano le differenziazioni ripetute di una medesima funzione. Questa nuova estensione della notazione cartesiana condusse Leibnitz all' analogia delle potenze positive colle differenziali, e delle potenze negative colle integrali. Lagrange ha seguito questa singolare analogia in tutt' i suoi sviluppi; e per una catena d' induzioni, che può essere riguardata come una delle più belle applicazioni che siensi fatte di questo metodo, egli è pervenuto a delle formule generali curiose non men che

Digitized by Google

utili, sulle trasformazioni delle differenze e delle integrali le une nelle altre, quando le variabili hanno degli accrescimenti finiti diversi, e quando questi accrescimenti sono infinitamente piccoli. Egli però non ce ne ha dato le dimostrazioni, che giudicava difficili. La teoria delle funzioni generatrici estende la notazione cartesiana a delle caratteristiche qualunque: essa mostra ad evidenza l'analogia delle potenze e delle operazioni indicate da queste caratteristiche; in guisa che può essere riguardata come il calcolo esponenziale delle caratteristiche. Tutto ciò che concerne le serie e l'integrazione dell' equazioni alle differenze, ne emerge con una estrema facilità.

Digitized by Google

APPLICAZIONE

DEL

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ.

CAP. I.

Dei giuochi.

Le combinazioni che i giuochi presentano sono state l'oggetto delle prime ricerche sulle probabilità. Nella varietà infinita di queste combinazioni, molte tra esse si prestano con facilità al calcolo; altre esigono dei calcoli più difficili; e le difficoltà crescendo a misura che le combinazioni addivengono più complicate, il desiderio di sormontarle e la curiosità hanno eccitato i geometri a perfezionare sempre più questo genere di analisi. Si è visto precedentemente che i beneficj di una lotteria poteansi facilmente determinare colla teoria delle combinazioni. Ma è più difficile il sapere in quante estrazioni si può scommettere uno contr'uno, per esempio, che tutt'i numeri saranno sortiti. n essendo il numero dei numeri, r quello de'numeri che sortono in ciascuna estrazione, e i il numero incognito delle estrazioni; l'espressione della probabilità della sortita di tutt'i numeri, dipende dalla differenza finita nma della potenza i del prodotto di r numeri consecutivi. Quando il numero n è considerevole, la ricerca del valore di i che rende questa probabilità eguale ad $\frac{1}{2}$, diviene impossibile, a meno che questa differenza non si converta in una serie convergentissima. Ciò si è felicemente eseguito col metodo di

Digitized by Google

sopra indicato per le approssimazioni delle funzioni di grandissimi numeri. Si trova parimente che la lotteria essendo composta di diecimila numeri de' quali un solo esce in ciascuna estrazione; vi è del disvantaggio a scommettere uno contro uno che tutt' i numeri sortiranno in 95767 estrazioni, e del vantaggio a fare la medesima scommessa per 95768 estrazioni. Nella lotteria di Francia questa scommessa è svantaggiosa per 85 estrazioni, e vantaggiosa per 66.

Consideriamo ancora due giuocatori A e B che giuocano insieme a *capo croce*, in maniera che in ciascun colpo, se vien *croce*, A dà un gettone a B; e se viene *capo*, B dà un gettone ad A: il numero dei gettoni di B è limitato; quello dei gettoni di A è illimitato; e la partita non dee finire che quando B non avrà più gettoni. Si domanda in quanti colpi si può scommettere uno contro uno che la partita sarà terminata. L' espressione della probabilità che la partita sarà terminata in un numero i di colpi, è data da una serie che contiene un gran numero di termini e di fattori, se il numero dei gettoni di B è considerevole: la ricerca del valore dell' incognita i che rende questa serie eguale ad $\frac{1}{2}$ sarà dunque allora impossibile, se non si pervenisse a ridurre la serie in serie convergentissima. Applicandovi il metodo di cui abbiamo parlato, si trova una espressione semplicissima dell' incognita, dalla quale risulta che se B per esempio ha cento gettoni, avvi poco meno di uno contro uno a scommettere che la partita sarà finita in 23780 colpi, e poco più d' uno contro uno a scommettere ch' essa sarà finita in 23781 colpi.

Questi due esempj uniti a quelli che abbiamo di già dato, bastano per far vedere in qual modo i problemi su i giuochi han potuto contribuire alla perfezione dell' analisi.

Digitized by Google

CAP. II.

Delle ineguaglianze occulte che possono esistere tra i colpi che si suppongono eguali.

Le ineguaglianze di questo genere hanno una influenza sensibile su i risultamenti del calcolo, influenza che merita un' attenzione particolare.

Consideriamo il giuoco di *capo croce*, e supponiamo che sia egualmente facile di tirare l' una o l' altra faccia della moneta. In allora la probabilità di aver *croce* al primo colpo è $\frac{1}{2}$, e quella di tirarla due volte di seguito è $\frac{1}{4}$. Ma se nella moneta vi esiste una ineguaglianza che faccia comparire una faccia piuttosto che l' altra, senza che si conosca qual' è la faccia favorita da questa ineguaglianza; la probabilità di aver *croce* al primo colpo sarà sempre $\frac{1}{2}$; perchè nell' ignoranza in cui si è della faccia che questa ineguaglianza favorisce, tanto la probabilità dell' avvenimento semplice è aumentata se questa ineguaglianza gli è favorevole, tanto essa è diminuita se l' ineguaglianza gli è contraria. Ma in questa ignoranza istessa, la probabilità di aver *croce* due volte di seguito è aumentata. In effetti, questa probabilità è quella di aver *croce* al primo colpo, moltiplicata per la probabilità che avendola avuta al primo colpo, si avrà parimenti al secondo; or, il venire di *croce* al primo colpo è un motivo di credere che l' ineguaglianza della moneta la favorisce; dunque allora l' ineguaglianza incognita aumenta la probabilità di aver *croce* al secondo colpo; essa accresce per conseguenza il prodotto delle due probabilità.

Per sottoporre quest' oggetto a calcolo, supponiamo che questa ineguaglianza aumenti di un ventesimo la probabilità dell' avvenimento semplice che essa favorisce. Se questo avvenimento è *croce* la sua probabilità sarà una metà più un ventesimo o undici ventesimi, e la probabilità di tirarla due

Digitized by Google

volte di seguito sarà il quadrato di undici ventesimi ossia centoventuno quattrocentesimi. Se l' avvenimento favorito è *capo*, la probabilità di *croce* sarà una metà meno un ventesimo o nove ventesimi, e la probabilità di tirarla due volte di seguito sarà ottantuno quattrocentesimi. Come non v' è ragione alcuna di credere che l' ineguaglianza favorisca uno di questi avvenimenti piuttosto che l' altro; è chiaro che per avere la probabilità dell' avvenimento composto *croce croce*, bisogna aggiungere le due probabilità precedenti, e prendere la metà della loro somma: il che dà centouno quattrocentesimi per questa probabilità che sorpassa un quarto di un quattrocentesimo o del quadrato dell' accrescimento un ventesimo che l' ineguaglianza aggiunge alla possibilità dell' avvenimento che essa favorisce. La probabilità di aver *capo capo* è similmente centouno quattrocentesimi; ma le probabilità di aver *croce capo* o *capo croce* non sono ciascuna che novantanove quattrocentesimi; imperochè la somma di queste quattro probabilità dev' eguagliare la certezza o l' unità. Del pari si trova generalmente che le cagioni costanti ed occulte che favoriscono gli avvenimenti semplici che si giudicano egualmente possibili, accrescono sempre la probabilità della ripetizione di un istesso avvenimento semplice.

In un numero pari di colpi, *croce* e *capo* debbono venire tutti due, o un numero pari o un numero impari di volte. La probabilità di ciascuno di questi casi è una metà, se le possibilità delle due faccie sono eguali; ma se esiste tra esse una incognita ineguaglianza, questa è sempre favorevole al primo caso.

Due giuocatori le di cui abilità si suppongono eguali, giuocano colle condizioni che in ciascun colpo, chi perde dà un gettone al suo avversario, e che la partita dura finchè uno dei giuocatori rimanga senza gettoni. Il calcolo delle probabilità ci mostra che per l' eguaglianza del giuoco, le [illegible] dei giuocatori debbono essere in ragione inversa dei

Digitized by Google

loro brincoli. Ma se fra le loro abilità vi esiste una picciola ineguaglianza incognita ; essa favorisce quel giuocatore di cui il numero dei brincoli è più piccolo. La sua probabilità di guadagnare la partita aumenta , se i giuocatori convengono di raddoppiare , di triplicare i loro gettoni ; ed essa addiviene $\frac{1}{2}$ o la medesima della probabilità dell' altro giuocatore , nel caso in cui i numeri de' loro gettoni divenissero infiniti , conservando sempre il medesimo rapporto.

L' influenza di queste ineguaglianze incognite si può correggere , sottomettendole ai colpi dell' azzardo. Così al giuoco di *capo croce* , se si ha una seconda moneta che si gitti ciascuna volta colla prima , e che si convenga di chiamar costantemente *croce* la faccia tirata con questa seconda moneta ; la probabilità di tirar *croce* due volte di seguito , colla prima moneta , si avvicinerà molto più di un quarto , che nel caso di una sola moneta. In quest' ultimo caso , la differenza è il quadrato del piccolo accrescimento di possibilità che l' ineguaglianza incognita dà alla faccia della prima moneta , ch' essa favorisce : nell' altro caso , questa differenza è il quadruplo prodotto di questo quadrato , pel quadrato corrispondente relativo alla seconda moneta.

Si gittino in un' urna cento numeri da uno fino a cento , nell' ordine della numerazione , e dopo aver agitata l' urna per mescolare questi numeri , se ne tiri uno ; è chiaro che se il miscuglio è stato benfatto , le probabilità della sortita dei numeri , saranno le medesime. Ma se si teme che non vi sieno tra esse delle piccole differenze dipendenti dall' ordine secondo il quale i numeri sono stati gittati nell' urna ; queste differenze si diminuiranno considerabilmente , gittando in una seconda urna questi numeri secondo il loro ordine di sortita dalla prima urna , ed agitando in seguito questa seconda urna per mescolare siffatti numeri. Una terza urna , una quarta , una quinta , ec. diminuirebbe sempre più queste differenze di già insensibili nella seconda urna.

Digitized by Google

CAP. III.

Delle Leggi della Probabilità, che risultano dalla moltiplicazione indefinita degli avvenimenti.

Fra le cagioni variabili ed incognite che noi comprendiamo sotto la denominazione di *azzardo*, e che rendono incerto ed irregolare il corso degli avvenimenti; a misura ch' essi si moltiplicano, vedesi nascere una regolarità sorprendente che sembra mirare ad un disegno, e che si è considerata come una pruova della provvidenza che governa il mondo. Ma col farvi riflessione, si riconosce ben presto che questa regolarità non è altro se non che lo sviluppo delle possibilità rispettive degli avvenimenti semplici i quali debbonsi presentare con più frequenza, allorchè sono più probabili. Supponiamo, per cagion d' esempio, un' urna che contenghi palle bianche e palle nere; e figuriamo che in ciascuna volta che se ne estrae una palla, si torni a mettere nell' urna per procedere ad una nuova estrazione. Il rapporto del numero delle palle bianche estratte, al numero delle palle nere estratte, sarà il più delle volte irregolarissimo nelle prime estrazioni; ma le cagioni variabili di questa irregolarità producono degli effetti alternativamente favorevoli e contrarj al corso regolare degli avvenimenti, e che distrugendosi a vicenda nell' insieme di un gran numero di estrazioni, lasciano semprepiù ravvisare il rapporto delle palle bianche alle palle nere contenute nell' urna, o le possibilità rispettive di estrarne una palla bianca o una palla nera in ciascuna estrazione. Da ciò risulta il teorema seguente.

La probabilità che il rapporto del numero delle palle bianche estratte, al numero totale delle palle sortite, non si allontana al di là di un dato intervallo, dal rapporto del numero delle palle bianche, al numero totale delle palle contenute nell' urna, si avvicina indefinitivamente alla cer-

Digitized by Google

tezza, colla moltiplicazione indefinita degli avvenimenti, comunque piccolo voglia supporsi questo intervallo.

Questo teorema indicato dal buon senso era difficile a dimostrarsi coll'analisi. Così l'illustre geometra Giacomo Bernulli, che è stato il primo ad occuparsene, attaccava una grande importanza alla dimostrazione che ne ha dato. Il calcolo delle funzioni generatrici, applicato a quest'oggetto, non solamente dimostra con facilità questo teorema; ma dà inoltre la probabilità che il rapporto degli avvenimenti osservati non si allontana che in certi limiti dal vero rapporto delle loro possibilità rispettive.

Dal teorema precedente si può tirare questa conseguenza, che dev'essere riguardata come una legge generale, cioè, che i rapporti degli effetti della natura sono pressochè costanti, quando questi effetti sono considerati in gran numero. Così, malgrado la varietà degli anni, la somma delle produzioni durante un numero di anni considerevole, è sensibilmente la medesima; in maniera che l'uomo, in virtù di un'utile previdenza, può mettersi al coperto della irregolarità delle stagioni, spandendo egualmente su tutt'i tempi, i beni che la natura distribuisce di una maniera ineguale. Io non eccettuo dalla legge precedente gli effetti dovuti alle cagioni morali. Il rapporto delle nascite annuali alla popolazione, e quello dei matrimonj alle nascite, non soffrono che delle piccole variazioni: in Parigi il numero delle nascite annuali è stato sempre press'a poco lo stesso, ed io ho sentito dire che alla posta, nè tempi ordinarj, il numero delle lettere rispinte per difetto d'indirizzo, cambia di poco in ciascun anno; il che è stato parimenti osservato in Londra.

Da questo teorema segue ancora che in una serie di avvenimenti, indefinitivamente prolungata, l'azione delle cagioni regolari e costanti dee prevalere col tempo su quella delle cagioni irregolari. Ciò che rende i guadagni delle lotterie, egualmente certe che i prodotti dell'agrigoltura, so-

Digitized by Google

no le combinazioni che le lotterie si riserbano, assicurando loro un beneficio nell' insieme di un gran numero di poste. Così, combinazioni favorevoli e numerose essendo costantemente legate all' osservanza dei principj eterni di ragione, di giustizia e di umanità, che fondano e mantengono le società; avvi un gran vantaggio nell' uniformarsi a questi principj e de' gravi inconvenienti a rimuoverne. Si consultino le istorie e la propria esperienza; vi si vedranno tutt' i fatti venire all' appoggio di questo risultamento del calcolo. Considerate i vantaggi che la buona fede ha procurato ai governi che ne han fatto la base della loro condotta, e com' essi sono stati compensati dei sacrificj che una scrupolosa esattezza a mantenere le promesse ha potuto loro costare: quale immenso credito nell' interno! quale preponderanza nell'estero! Vedete al contrario in quale abisso di disgrazie i popoli sono stati sovente precipitati dall' ambizione e dalla perfidia dei loro capi. Tutte le volte che una gran potenza inebbriata dall' amore delle conquiste, aspira al dominio universale; il sentimento della indipendenza, fra le nazioni ingiustamente attaccate, produce una lega di cui essa rimane quasi sempre la vittima. Similmente, fra le variabili cagioni che estendono o restringono i diversi stati; i limiti naturali, agendo come cagioni costanti, debbon finire col prevalere. Importa dunque alla stabilità come alla felicità degl' imperj, di non estenderli al dà di quei limiti nè quali essi sono ricondotti incessantemente dall' azione di siffatte cause; non altrimenti che le acque dei mari, sollevate da violenti tempeste, ricadono nei loro bacini per effetto della gravitazione. E' questo ancora un risultamento del calcolo delle probabilità, confermato da numerose e funeste esperienze. La storia trattata sotto il punto di veduta dell' influenza delle cagioni costanti, all' interesse della curiosità accoppierebbe quello di offrire agli uomini le più utili lezioni.

Delle volte gli effetti inevitabili di queste cause si attri-

Digitized by Google

buiscono a circostanze accidentali che non han fatto se non che sviluppare la loro azione. E' contro la natura delle cose che un popolo per esempio sia governato per sempre da un altro che un vasto mare ed una enorme distanza ne separa. Si può affermare che alla lunga questa cagione costante unendosi incessantemente alle cagioni variabili che agiscono nel medesimo senso, e che il progresso del tempo sviluppa, finirà col trovarne assai di forti per restituire al popolo sommesso la sua naturale indipendenza; o per riunirlo ad uno stato possente che gli sia contiguo.

In un gran numero di casi, e questi sono i più importanti dell' analisi degli azzardi, le possibilità degli avvenimenti semplici sono incognite, e noi siamo ridotti a cercare negli avvenimenti passati, degl' indizj che possano guidarci nelle nostre congetture sulle cagioni da cui essi dipendono. Applicando l' analisi delle funzioni generatrici al principio anzi esposto, sulla probabilità delle cagioni, dedotta dagli avvenimenti osservati; siamo condotti al teorema séguente.

Quando un avvenimento semplice o composto di molti avvenimenti semplici, come una partita di giuoco, è stato ripetuto un gran numero di volte; le possibilità degli avvenimenti semplici, che rendono il più probabile quello che si è osservato, sono quelle che l' osservazione indica colla massima verisimiglianza: a misura che l' avvenimento osservato si ripete, questa verisimiglianza aumenta, e finirebbe col confondersi colla certezza, se il numero delle ripetizioni divenisse infinito.

Qui vi sono due specie di approssimazioni: una di esse è relativa ai limiti presi dall' una parte e dall' altra, delle possibilità che danno la massima verisimiglianza al passato: l' altra approssimazione si rapporta alla probabilità che queste possibilità cadono in questi limiti. La ripetizione dell' avvenimento composto accresce sempre più questa probabilità, restando gl' istessi limiti: essa rinchiude sempre più l' intervallo di questi limiti, restando la stessa probabilità:

Digitized by Google

nell' infinito, questo intervallo addiviene nullo, e la probabilità si cambia in certezza.

Se questo teorema si applica al rapporto delle nascite dei fanciulli a quelle delle fanciulle, osservato nelle diverse parti dell'Europa; si trova che questo rapporto, pressochè da pertutto eguale a quello di 22 a 21, indica con una estrema probabilità, una facilità più grande nelle nascite dei fanciulli. Considerando inoltre che ciò accada nell' istesso modo in Napoli che a Pietroburgo, si vedrà che a questo riguardo l' influenza del clima è insensibile. Poteasi dunque supporre contra l' opinione comune che questa superiorità di nascite mascoline sussiste per fino nell' oriente. Io avava in conseguenza invitato i letterati francesi spediti in Egitto, ad occuparsi di questa questione interessante; ma la difficoltà di ottenere degl' indizj precisi sulle nascite, non ha permesso loro di risolverla. Fortunatamente Humboldt non ha trascurato quest' oggetto nella immensità di cose nuove che ha osservato e raccolto in America con tanta sagacità, costanza e coraggio. Fra i tropici ha egli trovato il medesimo rapporto di nascite di fanciulli a quelle di fanciulle, che si osserva in Parigi; il che dee far riguardare la superiorità delle nascite mascoline, come una legge generale della specie umana. Le leggi che a questo riguardo seguono le diverse specie di animali, mi sembrano degne dell' attenzione dei naturalisti.

Il rapporto delle nascite dei fanciulli a quelle delle fanciulle, differendo pochissimo dall' unità; numeri assai grandi di nascite osservate in un luogo potrebbero offrire a questo riguardo un risultamento contrario alla legge generale, senza che si fosse in diritto di conchiuderne che questa legge non vi esiste. Per tirare questa conseguenza, bisogna impiegare grandissimi numeri, ed assicurarsi che essa è indicata con una grande probabilità. Buffon cita per esempio nella sua *Arithmetique politique*, molti comuni di Borgogna, in cui le nascite delle fanciulle han sorpassato quelle dei fanciulli.

Digitized by Google

Fra questi comuni, quello di Carcelle-le-Grignon sopra 2009 nascite per cinque anni, presenta 1026 fanciulle, e 983 fanciulli. Quantunque questi numeri sieno considerabili, essi intanto non indicano una possibilità più grande nelle nascite delle fanciulle, che colla probabilità $\frac{2}{1\,0}$; e questa probabilità più piccola di quella di non tirar *croce* quattro volte di seguito al giuoco di *capo croce*, non è sufficiente onde ricercare la cagione di quest' anomalia che secondo ogni verisimiglianza scomparirebbe, se per lo spazio di un secolo si seguissero le nascite nel anzidetto comune.

I registri delle nascite, che tengonsi colla massima cura per assicurare lo stato dei cittadini; possono servire a determinare la popolazione di un grande impero, senza ricorrere alla numerazione dei suoi abitanti, operazione penosa e difficile per farla con esattezza. Ma per questo bisogna conoscere il rapporto della popolazione alle nascite annuali. Il mezzo di pervenirvi colla massima precisione consiste 1° a scegliere nell' impero, dipartimenti distribuiti di una maniera pressochè eguale su tutta la sua superficie, ad oggetto di rendere il risultamento generale, indipendente dalle circostanze locali; 2° a numerare attentamente per una data epoca gli abitanti di molti comuni in ciascuno di questi dipartimenti; 3° a determinare col registro delle nascite durante molti anni che precedono e seguono quest' epoca, il numero medio corrispondente delle nascite annuali. Questo numero diviso per quello degli abitanti, darà il rapporto delle nascite annuali alla popolazione, di una maniera tanto più sicura, quanto la numerazione sarà più considerevole. Convinto il governo dell' utilità di simil numerazione, si è indotto a mie istanze ad ordinarne l' esecuzione. In trenta dipartimenti sparsi egualmente su tutta la Francia, si è fatta la scelta dei comuni che potevano fornire le più precise rassegne. Le lore numerazioni han dato 2037615 individui per la somma totale dei loro abitanti al 23 settembre 1802.

Digitized by Google

Il registro delle nascite in questi comuni durante gli anni 1800, 1801 e 1802, ha dato

Nascite.	Matrimonj.	Morti.
110312 fanciulli. 105287 fanciulle.	46037.	103659 uomini. 99443 donne.

Il rapporto delle popolazioni alle nascite annuali è dunque $28\frac{3528845}{1000000}$: più grande che non si era fin' ora creduto. Moltiplicando per questo rapporto il numero delle nascite annuali in Francia, si avrà la popolazione di questo regno. Ma qual' è la probabilità che la popolazione così determinata, non si allontanerà dalla vera, al di là di un dato limite? Nel risolvere questo problema, e nell' applicare i dati precedenti, alla sua soluzione; io ho trovato, che essendo supposto di un milione, il numero nelle nascite annuali in Francia, il che porta la sua popolazione a 28352845 abitanti, evvi a scommettere quasi trecentomila contro uno, che l'errore di questo risultamento non è di un mezzo milione.

Il rapporto delle nascite dei fanciulli a quelle delle fanciulle, che il registro precedente offre, è quello di 22 a 21; e i matrimonj sono alle nascite come tre è a quattordici.

In Parigi i battesimi dei fanciulli di ambi i sessi si allontanano alquanto dal rapporto di 22 a 21. Dal 1745, epoca in cui si sono cominciati a distinguere i sessi sopra i registri delle nascite, fino alla fine del 1784, si sono battesimati in Parigi 393386 fanciulli e 377555 fanciulle. Il rapporto di questi due numeri è press' a poco quella di 22 a 24; sembra dunque che in Parigi una cagione particolare avvicina all' eguaglianza i battesimi de' due sessi. Se a questo oggetto si applica il calcolo delle probabilità, si trova che vi è 238 a scommettere contro uno, in favore dell' esistenza di questa cagione, il che basta per autorizzarne la

Digitized by Google

ricerca. Nell' riflettervi mi è sembrato che la differenza osservata dipenda da che i genitori della campagna e delle provincie, trovando qualche vantaggio a ritenere presso di loro i fanciulli, ne avevano spedito all' ospizio degli Esposti di Parigj, in minor numero relativamente alle fanciulle, che secondo il rapporto di due sessi. Ciò me lo ha provato il registro di quest' ospizio. Dal principio del 1735 fino alla fine del 1809 vi sono entrati 163499 fanciulli e 139405 fanciulle. Il primo di questi numeri non eccede il secondo se non che di un trentottesimo, mentre avrebbe dovuto sorpassare almeno di un ventiquattresimo. Ciò che conferma l' esistenza della causa assegnata si è, che non avendo riguardo agli esposti, il rapporto delle nascite de' fanciulli a quelle delle fanciulle, in Parigi come nel rimanente della Francia, è quello di 22 a 21.

La costanza della superiorità delle nascite de' Fanciulli su quelle delle Fanciulle, dacchè si osservano in Parigi ed in Londra, è sembrato ad alcuni letterali essere una prova della provvidenza senza la quale essi han pensato che le cagioni irregolari che turbano incessantemente il corso degli avvenimenti, avrebbe dovuto molte volte rendere le nascite annuali delle Fanciulle, superiori a quelle de' Fanciulli.

Ma questa prova è un nuovo esempio dell' abuso che sì spesso si è fatto delle cagioni finali, le quali scompariscono sempre con un esame approfondito di questioni, allorchè si hanno i dati necessarj per risolverli. La costanza di cui si tratta, è un risultamento delle cagioni regolari che danno la superiorità alle nascite de' fanciulli, e che prevalgono sulle anomalie dovute all'azzardo, quando il numero delle nascite annuali è considerevole. La ricerca della probabilità che questa costanza manterrassi per un lungo spazio di tempo, appartiene a quel ramo dell'analisi degli azzardi, che rimonta dagli avvenimenti passati alle probabilità degli avvenimenti futuri; e ne risulta che partendo dalle nascite osservate dal 1745 fino al 1784, vi è press' a poco quattro a

Digitized by Google

scommettere contro uno, che in Parigi le nascite annuali dei fanciulli sorpasseranno costantemente per lo spazio di un secolo, le nascite delle fanciulle; non v' ha dunque ragione alcuna di sorpresa, che ciò abbia luogo per un mezzo secolo.

Diamo ancora un esempio dello sviluppo dei rapporti costanti che gli avvenimenti presentano a misura che essi si moltiplicano. Supponiamo una serie di urne disposte circolarmente, e contenenti ciascuna un grandissimo numero di palle bianche e nere: i rapporti delle palle bianche o nere in queste urne, potendo essere differentissime sul principio, e tali per esempio che l' una di queste urne non contenghi che palle bianche, mentre che un altra non contiene che palle nere. Se si tira una palla dalla prima urna per metterla nella seconda, e che dopo aver bene agitata questa seconda urna, ad oggetto di ben mescolare la palla aggiunta colle altre, se ne tiri una palla per metterla nella terza urna, e così di seguito fino all' ultima urna da cui si estrae una palla per metterla nella prima, e che si ricominci indefinitivamente questa serie di estrazioni; l'analisi delle probabilità ci mostra che i rapporti delle palle bianche alle nere, in queste urne, finiranno coll' essere le medesime ed eguali al rapporto della somma di tutte le palle bianche, alla somma di tutte le palle nere contenute nelle urne. Così, in virtù di questo modo regolare di cangiamento, l' irregolarità primitiva di questi rapporti, scomparisce col tempo, per dar luogo all' ordine il più semplice. Or se tra queste urne vi s' intercalano delle nuove, nelle quali il rapporto della somma delle palle bianche alla somma delle palle nere che esse contengono, differisce dal precedente; continuando indefinitivamente sull' insieme di queste urne, l' estrazioni che abbiamo indicato; l' ordine semplice stabilito nelle antiche urne sarà turbato sul principio, e i rapporti delle palle bianche alle palle nere addiverranno irregolari; ma a poco a poco questa irregolarità scomparirà per dar luogo ad un ordine novello che sarà finalmente quel-

Digitized by Google

lo dell' eguaglianza dei rapporti delle palle bianche alle palle nere contenute nelle urne. Questi risultamenti possono estendersi a tutte le combinazioni della natura, nelle quali le forze costanti di cui i loro elementi sono animati, stabiliscono de' modi regolari di azione, proprj a far risplendere dal seno istesso del caos, sistemi retti da leggi ammirabili.

I fenomeni che sembran dipendere maggiormente dall' azzardo, moltiplicandosi, presentano dunque una tendenza ad approssimarsi incessantemente a rapporti fissi; di modo che se dall' una e dall' altra parte di ciascuno di questi rapporti si concepisce un intervallo piccolo quanto si vorrà, la probabilità che il risultamento medio delle osservazioni cade in questo intervallo, finirà col non differire dalla certezza, se non di una quantità al di sotto di ogni grandezza assegnabile. Col calcolo delle probabilità applicato ad un gran numero di osservazioni si può conoscere l' esistenza di questi rapporti. Ma prima di ricercarne le cagioni, per non smarrirsi in vane speculazioni, è necessario assicurarsi che essi sono indicati con una probabilità che non permette di riguardarle come anomalie dovute all' azzardo. La teoria delle funzioni generatrici dà una espressione semplicissima di questa probabilità, che si ottiene integrando il prodotto della differenziale della quantità il di cui risultamento dedotto da un gran numero di osservazioni si allontana dalla verità, con una costante minore dell' unità, dipendente dalla natura del problema, ed inalzata ad una potenza il di cui esponente è il rapporto del quadrato di questo allontanamento, al numero delle osservazioni. L' integrale presa tra dati limiti, e divisa per la medesima integrale estesa all' infinito positivo e negativo, esprimerà la probabilità che l' allontanamento della verità è compreso tra questi limiti. Tal' è la legge generale della probabilità dei risultamenti indicati da un gran numero di osservazioni.

Digitized by Google

CAP. IV.

Applicazione del Calcolo delle Probabilità, alla Filosofia naturale.

I fenomeni della natura sono il più delle volte inviluppati in tante circostanze estranee, un sì gran numero di cagioni perturbatrici vi mescola la sua influenza; che egli è difficile di riconoscerli. Non può pervenirvisi se non che moltiplicando le osservazioni o l'esperienze, acciò gli effetti estranei venendo a distruggersi reciprocamente, i risultamenti medj mettono in evidenza questi fenomeni ed i loro elementi diversi. Più le osservazioni sono numerose, e meno esse si allontanano fra di loro; più i loro risultamenti si approssimano alla verità. Quest' ultima condizione si adempie colla scelta dei metodi, colla precisione degl' istrumenti, e colla cura che si adopera à bene osservarli; in seguito, colla teoria delle probabilità si determinano i risultamenti medj i più vantaggiosi, o quei che danno minore occasione all'errore. Ma ciò non basta; è necessario altresì di valutare la probabilità che gli errori di questi risultamenti son compresi in dati limiti: senza di ciò non si ha che una conoscenza imperfetta del grado di esattezza ottenuto. Formule proprie a quest' oggetto sono dunque un vero perfezionamento del metodo delle scienze, e ch' è ben interessante di aggiungere a questo metodo. L' analisi che esse esigono è la più delicata e la più difficile della teoria delle probabilità: questa è una delle cose che io ho avuto principalmente in veduta nell' opera che ho pubblicato su questa teoria, e nella quale son pervenuto a delle formule di questo genere, che hanno il vantaggio rimarchevole di essere indipendenti dalla legge di probabilità degli errori, e di non contenere se non quantità date dalle osservazioni medesime, e dalle loro espressioni.

Ciascuna osservazione ha per espressione analitica una funzione degli elementi che si vogliono determinare; e se questi

Digitized by Google

elementi sono presso chè cogniti, questa funzione addiviene una funzione lineare delle loro correzioni. Eguagliandola all'osservazione istessa, si forma ciò che dicesi equazione di condizione. Se si ha un gran numero di equazioni simili, si combinano in maniera da ottenere tante equazioni finali, quanti elementi vi sono di cui si determinano in seguito le correzioni, col risolvere queste equazioni. Ma qual'è la maniera la più vantaggiosa di combinare l'equazioni di condizione, per ottenere l'equazioni finali? Qual'è la legge degli errori di cui gli elementi che se ne tirano, sono tuttavia suscettibili? è ciò che la teoria delle probabilità fa conoscere. La formazione di una equazione finale col mezzo dell'equazioni di condizione, riviene a moltiplicare ciascuna di queste con un fattore indeterminato, ed a riunire questi prodotti; fa d'uopo dunque scegliere il sistema dei fattori, che dà il più piccolo errore a temere. Or egli è visibile che se si moltiplicano gli errori possibili di un elemento, per le loro probabilità rispettive; il sistema il più vantaggioso sarà quello in cui la somma di questi prodotti, presi tutti positivamente, è un *minimum*; imperochè un errore positivo o negativo dev'essere considerato come una perdita. Formando dunque questa somma di prodotti, la condizione del *minimum* determinerà il sistema dei fattori che conviene di adottare, o il sistema il più vantaggioso. Parimenti si trova che questo sistema è quello dei coefficienti degli elementi; in ciascuna equazione di condizione; in maniera che si forma una prima equazione finale, moltiplicando rispettivamente ciascuna equazione di condizione, pel suo coefficiente del primo elemento, e riunendo tutte queste equazioni così moltiplicate. Una seconda equazione finale si forma coll'impiegare similmente i coefficienti del secondo elemento, e così di seguito. Di questa maniera, gli elementi e le leggi dei fenomeni, contenuti nella raccolta di un gran numero di osservazioni, si sviluppano colla massima evidenza.

La probabilità degli errori che ciascun elemento lascia an-

Digitized by Google

cora a temere, è proporzionale al numero, il di cui logaritmo iperbolico è l'unità, inalzato ad una potenza eguale al quadrato dell' errore, preso in meno, e moltiplicato per un coeficiente costante che può essere considerato come il modulo della probabilità degli errori; perchè l'errore restando lo stesso, la sua probabilità decresce con rapidità quand' esso aumenta; in guisa che l' elemento ottenuto pende, se posso così esprimermi, verso la verità, di tanto maggiormente, di quanto questo modulo è più grande. Per tal ragione io chiamerò questo modulo *peso* dell' elemento o del risultamento. Questo peso è il più grande possibile nel sistema dei fattori, il più vantaggioso; il che dà a questo sistema la superiorità su gli altri. Per effetto di un' analogia rimarchevole di questo peso, con quello dei corpi paragonati al loro centro comune di gravità, accade che se un medesimo elemento è dato da diversi sistemi composti ciascuno di un gran numero di osservazioni; il risultamento medio il più vantaggioso del loro insieme è la somma dei prodotti di ciascun risultamento parziale, moltiplicata pel suo peso, essendo questa somma divisa da quella di tutt' i pesi. Di più, il peso totale del risultamento dei diversi sistemi, è la somma dei loro pesi parziali; in maniera che la probabilità degli errori del risultamento medio del loro insieme, è proporzionale al numero che ha l' unità per logaritmo iperbolico, inalzato ad una potenza eguale al quadrato dell' errore, preso in meno, e moltiplicato per la somma di tutt' i pesi. Per verità, ciascun peso dipende dalla legge di probabilità degli errori di ciascun sistema, e questa legge è quasi sempre incognita; ma io son pervenuto felicemente ad eliminare il fattore che la contiene, col mezzo della somma de' quadrati dell' allontanamento delle osservazioni del sistema, dal loro medio risultamento. Per completare le nostre conoscenze su i risultamenti ottenuti dell' insieme di un gran numero di osservazioni, sarebbe dunque desiderabile che a lato di ciascun risultamento si scrivesse il peso

Digitized by Google

che gli corrisponde: per quest' oggetto, l' analisi fornisce dei metodi generali e semplici. Quando si ha parimenti ottenuto l' esponenziale che rappresenta la legge di probabilità degli errori, si avrà la probabilità che l' errore del risultamento è compreso in dati limiti, prendendo in questi limiti l' integrale del prodotto di questa esponenziale, per la differenziale dell' errore, e moltiplicandola per la radice quadrata del peso del risultamento, diviso per la circonferenza il di cui diametro è l' unità. Da ciò segue che per una medesima probabilità, gli errori dei risultamenti sono reciprochi alle radici quadrate dei loro pesi; il che può servire a paragonare le loro precisioni rispettive.

Per applicare questo metodo con successo, bisogna variare le circostanze delle osservazioni o dell' esperienze, in modo da evitare le cagioni costanti di errore. Bisogna che le osservazioni sieno numerose, e che lo sieno tanto più, quanta maggior quantità di elementi vi è a determinare; imperochè il peso del risultamento medio cresce come il numero delle osservazioni, diviso pel numero degli elementi. In queste osservazioni è necessario ancora che gli elementi seguano un andamento diverso; imperochè, se l' andamento degli elementi fosse rigorosamente lo stesso, il che renderebbe i loro coeficienti proporzionali nell' equazioni di condizione; questi elementi non formerebbero che una sola incognita, e sarebbe impossibile di distinguerli con queste osservazioni. Bisogna finalmente che le osservazioni sieno precise: questa condizione, la prima di tutte, accresce molto il peso del risultamento, la di cui espressione ha per divisore la somma dei quadrati della distanza delle osservazioni di questo risultamento. Con queste precauzioni potrassi far uso del metodo precedente, e misurare il grado di confidenza che meritano i risultamenti dedotti da un gran numero di osservazioni.

La regola che abbiam dato per conchiudere da equazioni di condizione le equazioni finali, riviene a rendere un *mi-*

Digitized by Google

nimum la somma dei quadrati degli errori delle osservazioni; imperochè ciascuna equazione di condizione diviene rigorosa, sostituendovi l'osservazione più il suo errore; e se da questo errore se ne tira l'espressione, è facile vedere che la condizione del *minimum* della somma dei quadrati di queste espressioni, dà la regola di cui si tratta. Questa regola è tanto più precisa, quanto più numerose sono le osservazioni; ma nel caso istesso in cui il loro numero è piccolo, pare naturale l'impiegare la medesima regola che in tutt' i casi offre un mezzo semplice di ottenere senza tastamento le correzioni che voglionsi determinare. Essa può servire ancora a paragonare la precisione di diverse Tavole astronomiche di un medesimo astro. Queste Tavole possono sempre esser supposte ridotte alla medesima forma, ed in allora esse non differiscono che per le epoche, per i movimenti medj, e per i coeficienti degli argomenti; imperochè, se una di esse contiene un coeficiente che non si trova punto nelle altre, è chiaro che ciò riviene a supporre nullo in queste, il coeficiente di quest' argomento. Or, se si rettificassero queste Tavole, colla totalità di buone osservazioni, esse soddisferebbero alla condizione che la somma dei quadrati degli errori sia un *minimum*; quelle Tavole adunque meritano la preferenza, che paragonate ad un numero considerevole di osservazioni, maggiormente si approssimano a questa condizione.

Il metodo esposto di sopra può essere impiegato con ispecialità nell' Astronomia. Le Tavole astronomiche debbono l'esatezza veramente sorprendente che esse hanno conseguito, alla precisione delle osservazioni e delle teorie, ed all' uso dell' equazioni di condizione, che fan concorrere un gran numero di eccellenti osservazioni, alla correzione di un istesso elemento. Ma restava a determinare la probabilità degli errori che questa correzione lascia tuttavia a temere: il che si viene a conoscere col metodo da me esposto. Per darne alcune applicazioni interessanti, io ho profittato

Digitized by Google

dell' immenso travaglio che Bouvard ha terminato su i movimenti di Giove e Saturno, di cui egli ha costruito le Tavole precisissime. Egli ha discusso colla più grande accortezza le opposizioni e le quadrature di questi due pianeti, osservati da Bradley e dagli astronomi che l' han seguito fino a quest' ultimi anni; ne ha conchiuso le correzioni degli elementi del loro movimento e le loro masse paragonate a quella del sole presa per unità. I suoi calcoli gli danno la massa di Saturno eguale alla 3512*ma* parte di quella del sole. Applicando loro le mie formule di probabilità, trovo che vi è undicimila a scommettere contro uno, che l'errore di questo risultamento non è un centesimo del suo valore; o, ciò che press' a poco torna lo stesso, che dopo un secolo di nuove osservazioni aggiunte alle precedenti, e discusse nell' istessa maniera, il nuovo risultamento non differirà di un centesimo, da quello di Bouvard. Questo dotto astronomo trova anche la massa di Giove eguale alla 1071*ma* parte del sole; ed il mio metodo di probabilità dà un milione a scommettere contro uno, che questo risultamento non è di un centesimo, in errore.

Questo metodo può essere applicato ancora con successo alle operazioni spettanti alla geodesia. Si determina la lunghezza di un arco grande alla superficie della terra, con una catena di triangoli che si poggiano su di una base misurata con esattezza. Ma qualunque possa essere la precisione che si apporta nella misura degli angoli; gli errori inevitabili, accumulandosi, possono allontanare sensibilmente dalla verità il valore dell' arco che si è conchiuso da un gran numero di triangoli. Questo valore non si conosce dunque che imperfettamente, se non si può assegnare la probabilità che il suo errore è compreso in dati limiti. L'errore di un risultamento geodesico è una funzione degli errori degli angoli di ciascun triangolo. Nella citata opera io ho dato delle formule generali per avere la probabilità dei valori di una o di molte funzioni lineari di un gran numero di errori par-

Digitized by Google

ziali di cui si conosce la legge di probabilità; col mezzo di queste formule si potrà dunque determinare la probabilità che l'errore di un risultamento geodesico è contenuto in limiti assegnati, qualunque sia la legge di probabilità degli errori parziali. Fia tanto più necessario di rendersi indipendente da questa legge, quanto le leggi le più semplici sono sempre infinitamente poco probabili, visto il numero infinito di quelle che sono esistenti nella natura. Ma la legge incognita degli errori parziali introduce nelle formule, una indeterminata che non permetterebbe di ridurle in numeri; se non si pervenisse ad eliminarle. Si è veduto che nelle questioni astronomiche in cui ciascuna osservazione fornisce un' equazione di condizione per avere gli elementi, si elimina questa indeterminata, mediante la somma dei quadrati dei residui; quando in ciascuna equazione si sono sostituiti i valori i più probabili degli elementi. Le questioni geodesiche non offrendo simili equazioni, bisogna cercare un altro mezzo di eliminazione. La quantità di cui la somma degli angoli di ciascun triangolo osservato sorpassa due angoli retti più l' eccesso sferico, fornisce questo mezzo. Così, la somma dei quadrati dei residui dell' equazioni di condizione, si rimpiazza colla somma dei quadrati di queste quantità; e la probabilità che l' errore del risultamento finale di una seguela di operazioni geodesiche non eccede una quantità data, non si può assegnare in numeri. Ma qual' è la maniera la più vantaggiosa di ripartire fra i tre angoli di ciascun triangolo, la somma osservata dai loro errori? L'analisi delle probabilità fa vedere che ciascun angolo dev' essere diminuito del terzo di questa somma, purchè il peso di un risultamento geodesico sia il più grande ch' è possibile; il che rende men probabile un medesimo errore. Avvi dunque molto vantaggio nell' osservare i tre angoli di ciascun triangolo ed a corregerli nel modo che si è detto. Il semplice buon senso fa presentire questo vantaggio; ma il calcolo delle probabilità soltanto può valutarlo, e far ve-

Digitized by Google

dere che con questa correzione esso addivenga il più grande ch' è possibile.

Per assicurarsi dell' esattezza del valore di un arco grande che poggia sopra una base misurata a l' una delle sue estremità, si misura una seconda base verso l' altra estremità, e dall' una di queste basi si conclude la lunghezza dell' altro. Se questa lunghezza si allontana pochissimo dall' osservazione; v' ha tutta la ragione di credere che la catena dei triangoli, che unisce queste basi è molto prossima all' esattezza, non che il valore dell' arco grande che ne risulta. Questo valore si corregge in seguito, col modificare gli angoli dei triangoli, in modo che le basi calcolate si accordino colle basi misurate. Ma ciò può farsi in una infinità di maniere fra le quali si dee preferire quella il di cui risultamento geodesico ha il più gran peso, poichè il medesimo errore addiviene meno probabile. L' analisi delle probabilità dà delle formule per avere direttamente la correzione la più vantaggiosa che risulta dalle misure di molte basi, e le leggi di probabilità che fa nascere la moltiplicità delle basi; leggi che addivengono più rapidamente decrescenti in virtù di questa moltiplicità.

In generale, gli errori dei risultamenti dedotti da un gran numero di osservazioni, sono funzioni *lineari* degl' errori parziali di ciascuna osservazione. I coefficienti di queste funzioni dipendono dalla natura del problema e dal metodo seguito per ottenere i risultamenti. Il metodo il più vantaggioso è evidentemente quello nel quale un medesimo errore nei risultamenti, è meno probabile che seguendo ogni altro metodo. L' applicazione del calcolo delle probabilità alla filosofia naturale consiste dunque nel determinare analiticamente la probabilità dei valori di questi coefficienti, ed a scegliere i loro coefficienti indeterminati, di modo che la legge di questa probabilità sia la più rapidamente decrescente. Eliminando in seguito alcune formule, coi dati della questione, il fattore che introduce la legge pressochè sempre

Digitized by Google

incognita della probabilità degli errori parziali; si potrà valutare numericamente la probabilità che gli errori dei risultamenti non eccedono una data quantità. Si avrà in tal guisa tutto ciò che possa desiderarsi riguardo ai risultamenti dedotti da un gran numero di avvenimenti.

La considerazione delle probabilità può servire a distrigare le piccole ineguaglianze dei movimenti celesti, inviluppate negli errori delle osservazioni, ed a rimontare alla causa delle anomalie osservate in questi movimenti. Paragonando tra loro tutte le sue osservazioni, fu che Ticone Brahé riconobbe la necessità di applicare alla luna, una equazione del tempo, differente da quella che si applicava al sole ed ai pianeti. L'insieme di un gran numero di osservazioni fu parimante che fece conoscere a Mayer che il coeficiente dell'ineguaglianza della precessione dev'essere alquanto diminuita per la luna. Ma siccome questa diminuzione, quantunque confermata ed anche aumentata da Mason, non sembrava risultare dalla gravitazione universale; la maggior parte degli astronomi la trascurarono nei loro calcoli. Avendo assoggettato al calcolo delle probabilità un numero considerevole di osservazioni lunari, scelte in questa veduta, e che Bouvard volle ben discutere a mie istanze; essa mi sembra indicata con una probabilità sì forte, che ho creduto dover ricercarne la cagione. Vidi bentosto ch'essa non potea essere che l'ellitticità dello sferoide terrestre, negletta fin d'allora nella teoria del movimento lunare, come non dovendovi produrre che termini insensibili. Ne conclusi che questi termini addivengono sensibili colle integrazioni successive dell'equazioni differenziali. Determinai dunque questi termini, con un'analisi particolare; e scoprii prima di tutto l'ineguaglianza del movimento lunare in latitudine, ch'è proporzionale al seno della longitudine della luna, e che veruno astronomo avea ancora sospettato. Col mezzo di questa ineguaglianza riconobbi in seguito che un'altra ne esiste nel movimento lunare in longitudine, la quale produce la diminuzione osservata da

Digitized by Google

Mayer, nell' equazione della precessione, applicabile alla luna. La quantità di questa diminuzione, e il coeficiente dell' ineguaglianza precedente in latitudine, sono adattatissimi a fissare lo schiacciamento della terra. Avendo partecipato le mie ricerche, a Burg che si occupò in allora a perfezionare le Tavole della luna, colla comparazione di tutte le buone osservazioni; lo pregai di determinare queste due quantità con una particolare attenzione. Per effetto di un accordo rimarchevolissimo, i valori che egli ha trovato, danno alla terra lo stesso schiacciamento $\frac{1}{305}$, schiacciamento che differisce di poco dal mezzo conchiuso dalle misure dei gradi del meridiano, e del pendolo; ma che, vista l'influenza degli errori delle osservazioni e delle cagioni perturbatrici, su queste misure, mi sembra più esattamente determinato da queste ineguaglianze lunari.

Per effetto della considerazione delle probabilità fu ancora che io riconobbi la cagione dell' equazione secolare della luna. Le osservazioni moderne su questo astro, paragonate alle antiche ecclissi, avevano indicato agli astronomi, un' accelerazione nel movimento lunare; ma i geometri e particolarmente Lagrange avendo inutilmente cercato nelle perturbazioni che questo movimento prova, i termini da' quali quest' accelerazione dipende, essi la rigettarono. Un esame scrupoloso delle osservazioni antiche e moderne, e dell' ecclissi intermediarj osservati dagli Arabi, mi fece vedere ch' essa era indicata con una grande probabilità. Sotto questo punto di veduta io allora ripresi la teoria lunare, e riconobbi che l' equazione secolare della luna è dovuta all' azione del sole su questo satellite, combinato colla variazione secolare dell' eccentricità dell' orbe terrestre; il che mi fece scoprire l' equazioni secolari dei movimenti dei nodi e del perigeo dell' orbita lunare, equazioni che non ancora erano state sospettate dagli astronomi. L' accordo rimarchevolissimo di questa teoria, con tutte le osservazioni antiche e moderne, l' ha portata al più alto grado di evidenza.

Digitized by Google

Il calcolo delle probabilità mi ha parimente condotto alla cagione delle grandi irregolarità di Giove e di Saturno. Paragonando le moderne alle antiche osservazioni, Halley trovò un' accelerazione nel movimento di Giove, ed un rallentamento in quello di Saturno. Per conciliare le osservazioni, egli assoggettò questo movimento, a due equazioni secolari di segni contrarj, e crescente come i quadrati dei tempi scorsi dal 1700. Eulero e Lagrange assoggettarono all' analisi, le alterazioni che dovea produrre in questi movimenti, l' attrazione scambievole dei due pianeti. Vi trovarono essi dell' equazioni secolari; ma i loro risultamenti eran sì diversi, che uno di essi almeno avea dovuto errare. Mi determinai dunque a riprendere questo importante problema della meccanica celeste, e riconobbi l' invariabilità dei medj movimenti planetarj; il che fece scomparire l' equazioni secolari introdotte da Halley, nelle Tavole di Giove e di Saturno. Per ispiegare dunque le grandi irregolarità di questi pianeti, non restava che le attrazioni delle comete alle quali molti astronomi ebbero effettivamente ricorso, o l' esistenza di una ineguaglianza alla lunga periodica, prodotta nei movimenti dei due pianeti in virtù della loro azion reciproca, ed affetta da segni contrarj per ciascuna di esse. Un teorema che io trovai sulle ineguaglianze di questo genere, mi rese verisimilissima questa ineguaglianza. A tenore di questo teorema, se il movimento di Giove si altera, quello di Saturno si rallenta, ciò ch' è di già conforme a quello che Halley avea rimarcato; di più, l' accelerazione di Giove, risultante dal medesimo teorema, è al rallentamento di Saturno, pressochè nel rapporto dell' equazioni secolari proposte da Halley. Considerando i movimenti medj di Giove e di Saturno mi fu agevole il riconoscere che due volte quello di Giove non oltrepassa che di una piccolissima quantità, cinque volte quello di Saturno. Il periodo di una ineguaglianza che avrebbe questo argomento, sarebbe di circa nove secoli. Per verità il suo coefficiente sarebbe dell' ordine dei cu-

Digitized by Google

bi delle eccentricità dell' orbite; ma io sapeva che in virtù delle integrazioni successive, esso acquista per divisore, il quadrato del piccolissimo moltiplicatore del tempo nell' argomento di questa ineguaglianza, il che può dargli un grande valore; mi sembrò dunque probabilissimo che questa ineguaglianza ha luogo. La seguente osservazione accrebbe ancora la sua probabilità. Supponendo nullo il suo argomento, verso l' epoca delle osservazioni di Ticone Brahé; vidi che Halley avea dovuto trovare colla comparazione delle osservazioni moderne alle antiche, le alterazioni che egli avea indicate; mentre che la comparazione delle osservazioni moderne tra loro, dovea offrire delle alterazioni contrarie e simili a quelle che Lambert avea concluso da questa comparazione. L' esistenza di questa ineguaglianza mi sembrò dunque estremamente verisimile, ed io non esitai punto adintraprendere il calcolo lungo e pènoso, necessario per assicurarmene. Essa fu interamente confirmata dal risultamento del calcolo, che mi fece inoltre conoscere un gran numero di altre ineguaglianze il di cui complesso ha portate le Tavole di Giove e di Saturno, alla precisione delle osservazioni medesime.

Col mezzo del calcolo delle probabilità io riconobbi ancora la legge rimarchevole dei movimenti medj dei tre primi satelliti di Giove, secondo la quale la longitudine media del primo, meno tre volte quella del secondo, più due volte quella del terzo, è rigorosamente eguale alla semicirconferenza. L' approssimazione colla quale i movimenti medj di questi astri soddisfano a questa legge dall' epoca della loro scoperta, indicava la sua esistenza con una verisimiglianza estrema; ne cercai dunque la cagione, nella loro azione mutua. L' esame approfondito di quest' azione, mi fece vedere, esser bastato che in origine, i rapporti dei loro movimente medj siensino approssimati a questa legge, in certi limiti; purchè la loro scambievole azione l' abbia stabilita e la mantenghi in vigore. Così questi tre corpi si libreranno

Digitized by Google

eternamente nello spazio, secondo la legge precedente; a meno che cagioni estranee, come le comete, non venghino a cangiare bruscamente i loro movimenti intorno a Giove.

Da ciò si vede quanto bisogna essere attento alle indicazioni della natura, allorchè sono il risultamento di un gran numero di osservazioni, quantunque d' altronde esse sieno inesplicabili coi mezzi conosciuti. L' estrema difficoltà dei problemi relativi al sistema del mondo, ha forzato i geometri di ricorrere a delle approssimazioni che lascian sempre a temere che le quantità trascurate non abbiano un' influenza sensibile. Quando essi sono stati avvertiti di questa influenza, dalle osservazioni; son rivenuti sull' analisi: col rettificarla, han sempre ritrovato la cagione delle anomalie osservate; ne han determinato le leggi ed han sovente superata l' osservazione scoprendola da ineguaglianze ch' essa non avea per anco indicate. Così può dirsi che la natura ha concorso alla perfezione analitica delle teorie fondate sul principio della gravitazione universale; ed a senso mio questa è una delle più forti prove della verità di questo principio ammirabile

Uno dei fenomeni i più rimarchevoli del sistema del mondo, è quello di tutti' movimenti di rotazione e di rivoluzione dei pianeti e dei satelliti, nel senso della rotazione del sole, e pressochè nel piano del suo equatore. Un fenomeno egualmente rimarchevole non e' l' effetto dall' azzardo: esso indica una cagione generale che ha determinato tutti questi movimenti. Per avere la probabilità con cui questa causa è indicata, osserveremo che il sistema planetario come noi l' abbiam conosciuto attualmente, è composto di undici pianeti e di diciotto satelliti. Si sono riconosciuti i movimenti di rotazione del sole, di sei pianeti, de' satelliti di Giove, dell' anello di Saturno, e di uno dei suoi satelliti. Questi movimenti con quei di rivoluzione, formano in insieme di quarantatre movimenti diretti nel medesimo senso; or, coll' analisi delle probabilità si trova che vi so-

Digitized by Google

a scommettere più di quarantamila miliardi contro uno, che questa disposizione non è l'effetto dell'azzardo; il che forma una probabilità molto superiore a quella degli avvenimenti storici su i quali non si permette alcun dubbio. Noi dunque dobbiamo credere, almeno colla medesima confidenza, che una cagione primitiva ha diretto i movimenti planetarj; sopra tutto se consideriamo che l'inclinazione del più gran numero di questi movimenti all'equatore solare, è molto piccola.

Un altro fenomeno egualmente rimarchevole del sistema solare, è la poca eccentricità delle orbite planetarie e dei satelliti, mentre che quelle delle comete sono moltissimo oblungate, le orbite di questo sistema non offrendo variazioni intermediarie tra una grande ed una piccola eccentricità. Noi siamo ancora forzati di riconoscere quì l'effetto di una cagione regolare: l'azzardo non ebbe dato una forma pressochè circolare alle orbite di tutti i pianeti e dei loro satelliti; è necessario dunque che la cagione che ha determinato i movimenti di questi corpi, li abbia reso pressochè circolari. Bisogna ancora che le grandi eccentricità delle orbite delle comete risultino dall'esistenza di questa causa, senza che essa abbia influito sulle direzioni dei loro movimenti; perchè si trova che vi sono quasi tante comete retrograde, quante sono le dirette, e che l'inclinazione media di tutte le loro orbite all'eclittica, si approssima moltissimo ad un semi-angolo retto, come dev'essere, se questi corpi sono stati lanciati all'azzardo.

Qualunque sia la natura della causa di cui si tratta; poichè essa ha prodotto o diretto i movimenti dei pianeti, bisogna che abbia abbracciato tutti questi corpi; e viste le distanze che li separano, essa non può essere stata se non che un fluido di una immensa estensione: per aver dato loro nel medesimo senso un movimento pressochè circolare intorno al sole, bisogna che questo fluido abbia circondato questo astro, come un'atmosfera. La considerazione dei mo-

Digitized by Google

rimonti piuttosto ci conduce dunque a pensare che in virtù di un eccessivo calore, l'atmosfera del sole si è primitivamente estesa al di là delle orbite di tutti i pianeti, e che si è successivamente rinchiusa nei suoi limiti attuali.

Nello stato primitivo in cui noi supponiamo il sole, esso rassomigliava alla nebulosa che il telescopio ci mostra composte di un nocciuolo più o meno brillante, cinto di una nebulosità che nel condensarsi alla superficie del nocciuolo, deve trasformarlo un giorno in stella. Se per analogia si suppongono tutte le stelle formate di questa maniera; si può immaginare il loro stato anteriore di nebulosità, preceduto anch'esso da altri stati nei quali la materia nebulosa era sempre più diffusa, essendo il nocciuolo di meno in meno luminoso e denso. Risalendo tant'oltre per quanto è possibile, si giunge parimente ad una nebulosità talmente diffusa, che potrebbe appena immaginarsene l'esistenza.

Tal'è in effetti il primo stato delle nebulose che Herschel ha osservato con una cura particolare, mediante i suoi potenti telescopj, e nei quali egli ha seguito i progressi della condensazione, non sopra una sola, non potendo siffatti progressi divenir sensibili per noi se non dopo secoli, ma sul loro insieme; press'a poco come in una vastissima foresta si può seguire l'accrescimento degli alberi su gl'individui di età diversa che essa contiene. Egli ha osservato prima di tutto la materia nebulosa sparsa in ammassi diversi nelle differenti parti del cielo di cui essa occupa una grand'estensione. In alcuno di questi ammassi egli ha visto questa materia debolmente condensata intorno di uno o di molti nocciuoli poco brillanti. In altre nebulose, questi nocciuoli brillano di vantaggio relativamente alla nebulosità che le circonda. Le atmosfere di ciascun nocciuolo, venendo a separarsi per una condensazione ulteriore, ne risultano delle nebulose multiplici formate dai nocciuoli brillanti vicinissimi e circondati, ciascuno, di un'atmosfera: delle volte la materia nebulosa nel condensarsi in un modo uniforme, ha prodotto le ne-

Digitized by Google

bulose che diconsi *planetarie*. Finalmente un grado maggiore di condensazione trasforma tutte queste nebulose in stelle. Le nebulose classificate in conseguenza di questa veduta filosofica, indicano con una estrema verisimiglianza, la loro trasformazione futura in stelle, e lo stato anteriore di nebulosità delle stelle esistenti. Le considerazioni seguenti vengono naturalmente all' appoggio delle pruove dedotte da queste analogie.

La disposizione particolare di alcune stelle visibili ad occhio nudo, ha colpito da lungo tempo i filosofi osservatori. Mitchel ha di già osservato quanto è poco probabile che le stelle delle Plejadi, per esempio, sieno state rinchiuse nello stretto spazio che le contiene, per le sole combinazioni dell' azzardo; e ne ha conchiuso che questo gruppo di stelle, e i gruppi simili che il cielo ci presenta, sono gli effetti di una causa primitiva, o di una legge generale della natura. Questi gruppi sono un necessario risultamento della condensazione delle nebulose a molti nocciuoli; imperochè egli è visibile che la materia nebulosa essendo incessantemente attirata da questi nocciuoli diversi, essi coll'andar del tempo debbono formare un gruppo di stelle, simile a quello delle Plejadi. La condensazione delle nebulose a due nocciuoli forma parimenti delle stelle vicinissime girando l' una intorno all' altra, simili a quelle di cui Herschel ha di già considerato i rispettivi movimenti. Tali sono ancora le sessantuno di Cigno e suo seguito, nelle quali Bessel ha riconosciuto de' movimenti proprj, sì considerevoli e sì poco differenti, che la prossimità di questi astri tra loro, e il loro movimento intorno al loro centro comune di gravità, non dee lasciare alcun dubbio. Così, in virtù dei progressi del condensamento della materia nebulosa, si discende alla considerazione del sole circondato altra volta da una vasta atmosfera, considerazione alla quale si rimonta, come si è veduto, coll' esame dei fenomeni del sistema solare. Un caso cotanto rimarchevole dà una probabilità molto appres-

Digitized by Google

simativa alla certezza riguardo all' esistenza di questo stato anteriore del sole.

Ma in che modo l'atmosfera solare ha essa determinato i movimenti di rotazione e di rivoluzione dei pianeti e dei satelliti ? Se questi corpi avessero penetrato profondamente in quest' atmosfera, la sua resistenza li avrebbe fatti cadere sul sole ; siamo dunque condotti a credere con molta verisimiglianza, che i pianeti sono stati formati ai limiti successivi dell' atmosfera solare la quale rinserrandosi in virtù del raffreddamento, ha dovuto abbandonare nel piano del suo equatore, alcune zone di vapori, che la scambievole attrazione delle sue molecole ha finalmente cambiato in diverse sferoidi.

Nella mia *Exposition du Système du Monde* (*) io ho estesamente sviluppato questa ipotesi, la quale mi sembra propria a soddisfare a tutt' i fenomeni che questo sistema ci presenta.

In questa ipotesi, le comete sono estranee al sistema planetario. Legando la loro formazione a quella delle nebulose ; possono riguardarsi come piccole nebulose a nocciuoli erranti di sistemi in sistemi solari, e formate dalla condensazione della materia nebulosa sparsa con tanta profusione nell' universo. Le comete sarébbero parimenti per rapporto al nostro sistema, ciò che gli aereoliti sono relativamente alla terra, cui sembrano stranieri. Allorchè questi astri addivengono visibili per noi, essi offrono un insieme così perfetto colle nebulose, che sovente si confondono con esse ; e non si perviene a distinguernele se non per effetto del loro movimento, o per la conoscenza di tutte le nebulose contenu-

(*) È l' opera che mi son determinato di tradurre nel nostro idioma, immediatamente dopo aver dato termine alla presente ; essendochè vive istanze di alcuni letterati non mi permettono ritardare più lungo tempo. (*Il Trad.*).

Digitized by Google

te nella parte del cielo in cui si mostrano. Questa supposizione spiega di una maniera felice la grand' estensione che prendono le teste e le code delle comete, a misura che esse si avvicinano al sole, e l' estrema rarità di queste code, che malgrado la loro immensa profondità non indeboliscono gran fatto lo splendor delle stelle che veggonsi a traverso.

Quando piccole nebulose pervengono nella parte dello spazio in cui l' attrazione del sole è predominante, e che chiameremo *sfera di attività* di questo astro; esso le forza a descrivere orbite ellittiche o iperboliche. Ma la loro celerità essendo egualmente possibile secondo tutte le direzioni, esse debbon muoversi indifferentemente in tutt' i sensi, e sotto tutte le inclinazioni all' ecclittica; il che è conforme a ciò che si osserva.

La grande eccentricità delle orbite cometarie risulta ancora dall' ipotesi precedente. In effetti, se queste orbite sono ellittiche, sono molto oblungate; poichè i loro grandi assi sono almeno eguali al raggio della sfera di attività del sole. Ma queste orbite possono essere iperboliche, e se gli assi di queste iperboli non sono troppo grandi per rapporto alla distanza media del sole dalla terra, il movimento delle comete che le descrivono, comparirà sensibilmente iperbolico. Intanto sopra cento comete di cui si hanno di già gli elementi, non ve n' ha certamente alcuna che sia comparsa muoversi in un' iperbole; bisogna dunque che gl' impulsi che danno una iperbole sensibile sieno estremamente rare per rapporto agl' impulsi contrarj.

Le comete sono sì piccole, che per addivenire visibili, la loro distanza perifelia dev' esser poco considerevole. Questa distanza non ha sorpassato finora se non due volte il diametro dell' orbe terrestre, e il più delle volte essa è stata al di sotto del raggio di quest' orbita. Si concepisce che per approssimarsi in tanta vicinanza al sole, la loro celerità al momento del loro ingresso nella sua sfera di attività, deva avere una grandezza ed una direzione, comprese in limiti

Digitized by Google

angusti. Determinando coll' analisi delle probabilità il rapporto degl' impulsi che in questi limiti danno una iperbole sensibile, agl' impulsi che danno un' orbita che si può confondere con una parabola; io ho trovato che vi è seimila almeno a scommettere contro l' unità, che una nebulosa che penetra nella sfera di attività del sole, in guisa da poter essere osservata, descriverà o una ellissi eccessivamente oblungata, o una iperbole che per la grandezza del suo asse, si confonderà sensibilmente con una parabola dalla parte che si osserva: non dee dunque recar sorpresa se finora non siensino riconosciuti movimenti iperbolici.

L' attrazione dei pianeti, e forse ancora la resistenza dei mezzi eterei, ha dovuto cangiare molte orbite cometarie in ellissi di cui il grand' asse è minore del raggio della sfera di attività del sole; il che aumenta gli avvenimenti delle orbite ellittiche. Si può credere che questo cangiamento ha avuto luogo per la cometa del 1682, la sola di cui finora siesi verificata la rivoluzione.

Vado presentemente a considerare la terra e i fluidi che la ricoprono. Il fenomeno che può spandere il più gran lume sulla regolarità dei suoi strati, è la variazione della gravità alla sua superficie. Questa variazione si determina, sia trasportando in luoghi diversi il medesimo pendolo, e contando il numero delle sue oscillazioni in un dato tempo; sia misurandovi direttamente la lunghezza del pendolo a secondi. Queste esperienze sono facili ed al presente suscettibili di una estrema precisione: vista la loro importanza nella teoria della terra, esse debbono essere specialmente raccomandate ai naviganti. Quelle che si sono di già fatte, quantunque lascino molto a desiderare, seguono intanto un corso regolarissimo, e molto approssimativo alla legge di variazione la più semplice, quella del quadrato del seno della latitudine: i due emisferi boreale ed australe non presentano a questo riguardo alcuna differenza sensibile, o almeno tale da non poter essere attribuita agli errori delle

Digitized by Google

osservazioni. Se la lunghezza del pendolo a secondi si prende per unità sotto l' equatore ; l' insieme di queste osservazioni dà cinquecentocinquantuno centomilesimi , per il coeficiente del termine proporzionale al quadrato del seno della latitudine. Le mie formule di probabilità , applicate a questo risultamento , danno duemilacentosettantasette a scommettere contro uno , che il vero coeficiente è compreso nei limiti cinquemilesimi e seimilesimi. Se la terra è un' ellissoide di rivoluzione ; il suo schiacciamento si ottiene col sottrarre il coeficiente della legge della gravità dà ottocentosettantacinque centomillesimi. Il coeficiente cinquemillesimi corrisponde altresì allo schiacciamento un duecentosettantaduesimo ; vi ha dunque quattromilatrecentocinquantaquattro a scommettere contro uno , che lo sciacciamento della terra è al di sotto di questa frazione. Vi sono dei milioni di migliaja di milioni a scommettere contro uno , ch'esso è minore di quello che corrisponde all' omogeneità della terra , e che i strati terrestri aumentano di densità , a misura che si approssimano al centro di questo pianeta. La regolarità della gravità alla sua superficie , prova ch' essi sono disposti simmetricamente intorno a questo punto. Queste due condizioni , conseguenze necessarie dello stato fluido , non potrebbero evidentemente sussistere per la terra , se essa non avesse avuto primitivamente quello stato che un calore eccessivo ha potuto soltanto dare alla terra intera ; il che viene all' appoggio dell' ipotesi che abbiamo emessa sulla formazione dei corpi celesti.

Sull' invito dell' Accademia delle Scienze , nel principio dell' ultimo secolo si fecero a Brest alcune osservazioni di maree , che furono continuate per lo spazio di sei anni consecutivi. La situazione di quel porto è favorevolissimo a questo genere di osservazioni. Esso comunica col mare per mezzo di un canale che si termina in una rada vastissima nel fondo della quale il porto è stato costrutto. Le irregolarità del movimento del mare pervengono altresì in questo

Digitized by Google

porto molto affievolite ; press' a poco come la oscillazioni che il movimento irregolare di un vascello produce nel barometro , stenuate da una contrazione fatta al tubo di questo strumento. D' altronde , le maree essendo considerevoli a Brest , le variazioni accidentali cagionate dai venti , non ne sono che una debole parte. Così nelle osservazioni di queste maree si rimarca una grande regolarità che non deve alterare la piccola riviera che si è perduta nella rada immensa di questo porto. Sorpreso da questa regolarità , io pregai il governo di ordinare a Brest una nuova serie di osservazioni , durante un periodo intero del movimento dei nodi dell' orbita lunare ; il che ho avuto il piacere di veder eseguito. Queste osservazioni datate giugno 1806 , sono state da quell' epoca continuate senza interruzione fin oggi ; il che già eccede la metà del periodo di cui ho parlato. Le leggi delle altezze e degl' intervalli delle maree, relalive alle fasi della luna , alle stagioni , e alle distanze della luna e del sole dalla terra , si manifestano nell' insieme di queste osservazioni combinate nel modo il più vantaggioso , con una estrema probabilità. Esse offrono a questo riguardo il più perfetto accordo colle osservazioni fatte un secolo prima. Esse si accordano egualmento bene colla legge generale della gravitazione , cui si ebbe potuto agevolmente rimontare col solo loro mezzo.

La teoria delle maree che in conseguenza di questa legge io ho esposto nel quarto libro della *Mécanique Céleste* (*) , riposa sopra un principio di dinamica , che la rende sempli-

(*) Il Signor Giovanni Taddej , nostro compatriota , uomo assai intelligente delle materie astronomiche , ci ha fatto il bene di dare alla luce la versione italiana dell' *Estratto* di questo capo d' opera di Laplace. Questa versione di cui ho il vantaggio ammirarne la bontà s' imprime attualmente in questa tipografia ov' io assisto per l' edizione di questo *Saggio* e di altri miei lavori letterarj. (*Il Trad.*).

Digitized by Google

cissima ed indipendente dalle circostanze locali del porto, circostanze troppo complicate perchè sia possebile sottometterle a calcolo.

Mercè questo principio esse entrano come arbitrarie nei risultamenti dell'analisi, che debbono altresì rappresentare le osservazioni, se la gravitazione universale è in effetti la vera cagione del flusso e riflusso del mare. Ecco qual'è questo principio che può applicarsi a molti altri fenomeni: *lo stato di un sistema di corpi nel quale le condizioni primitive del movimento sono scomparse per effetto della resistenza che esso prova, è periodico come le forze che l'animano.* Nel riunire questo principio a quello della coesistenza delle oscillazioni estremamente piccole; io son pervenuto ad una espressione dell'altezza delle maree, di cui le arbitrarie comprendono l'effetto delle circostanze locali del porto. Le numerose varietà delle maree, e le modificazioni che esse ricevono da queste circostanze, sono tutte rappresentate da questa espressione, con una esattezza singolare. L'una di queste modificazioni la più rimarchevole, è il ritardo di un giorno e mezzo, delle più grandi e delle più piccole maree, su gl'istanti delle sigizie e delle quadrature. L'espressione di cui si tratta fa vedere che questo ritardo dipende dalla rapidità del movimento dell'astro che agisce sull'Oceano, combinata colle circostanze locali; e che la medesima cagione produce a Brest un accrescimento nel rapporto delle azioni del sole e della luna. L'analisi fornisce diversi mezzi per determinare questo accrescimento colle osservazioni. Nell'applicarvi le mie formule di probabilità, trovo che vi è a scommettere ventunomilaquattrocento contro uno, che esso esiste a Brest: le osservazioni le danno eguale ad un ottavo circa del vero rapporto; d'onde si conchiude che la massa della luna è un sessantanovesimo di quella della terra; il che è importantissimo di conoscere nella scienza astronomica.

L'azione del sole e della luna che traversa la nostra atmosfera per giungerne fino all'Oceano, produce senza dub-

Digitized by Google

bio nella medesima delle oscillazioni analoghe a quella del flusso e riflusso. Ma queste oscillazioni sono assai deboli; e per distinguerle in mezzo ai movimenti dell' atmosfera, vi bisognerà una lunga catena di osservazioni fatte con eccellenti barometri, e principalmente sotto l' equatore ove i cangiamenti irregolari dell' atmosfera terrestre sono di pochissima considerazione.

Il principio che serve di base alla mia teoria delle maree, generalizzandosi, può estendersi a tutti gli effetti dell' azzardo al quale si accoppiano delle cagioni variabili, seguendo leggi regolari. L' azione di siffatte cagioni produce nei risultamenti di un gran numero di effetti, delle varietà che seguono le medesime leggi e che ponno riconoscersi coll' analisi delle probabilità: a misura che gli effetti si moltiplicano, queste varietà si manifestano con una probabilità sempre crescente, e che si confonderebbe colla cettezza, se il numero degli effetti fosse infinito. Questo teorema è analogo a quello che ho sviluppato precedentemente sull' azione delle cagioni costanti. Tutte le volte dunque che noi vediamo che una cagione il di cui andamento è regolare, può influire sopra un genere di avvenimenti; possiamo occuparci a riconoscere la sua influenza, moltiplicando le osservazioni; e quando questa influenza sembra manifestarsi, l' analisi delle probabilità determina la probabilità della sua esistenza e quella della sua intensità. Così la variazione della temperatura dal giorno alla notte, potendo modificare la pressione dell' atmosfera, e per conseguenza le altezze del barometro; è naturale di pensare che osservazioni moltiplicate di queste altezze debbono manifestare l' influenza del calorico solare. In effetti sotto l' equatore ove questa influenza sembra essere la più grande, si è riconosciuta da molto tempo una piccola variazione diurna del barometro di cui il *maximum* ha luogo verso le nove della mattina, e il *minimum* verso le quattro della sera. Un secondo *maximum* ha luogo verso le undici della sera, e 'l secondo *minimum*

Digitized by Google

verso le quattro della mattina. Le oscillazioni della notte sono minori di quelle del giorno, la di cui estensione è di due millimetri. L'incostanza dei nostri climi non ha tolto questa variazione ai nostri osservatori; quantunque essa vi sia men sensibile di quel che lo fosse fra i tropici. Nell'applicare le formule di probabilità alle osservazioni numerose e precise fatto da Ramond per lo spazio di più anni consecutivi; si vede che esse indicano l'esistenza di questo fenomeno, con una estrema probabilità. Queste osservazioni gli han fatto scoprire ancora una variazione nel barometro, dipendente dalle stagioni. Egli trova la sua altezza media di ciascun mese, al suo primo *maximum* poco dopo il solstizio d'inverno, e al suo primo *minimum* in aprile; un secondo *maximum* ha luogo verso il solstizio di està, e il secondo *minimum* in settembre. L'analisi ci mostra che questi risultamenti sono di già indicati con verisimiglianza: essi d'altronde sono confermati da altre osservazioni. Il tempo farà conoscere se i mesi delle più grandi e delle più piccole altezze sono i medesimi nei diversi climi. Queste variazioni annuali e diurne del barometro, non che i venti periodici e i mousoni, sono dovuti senza dubbio al calorico solare combinato col movimento di rotazione della terra. Ma effetti così complicati è quasi impossibile che possano essere assoggettati a calcolo.

Coll'analisi delle probabilità si può verificare ancora l'esistenza o l'influenza di alcune cause di cui si è creduto rimarcare l'azione su gli esseri organizzati. Di tutti gli strumenti che noi possiamo impiegare onde conoscere gli agenti impercettibili della natura, i più sensibili sono i nervi, soprattutto allorchè cagioni particolari esaltano la loro sensibilità. Mercè questi si è scoperta la lieve elettricità che sviluppa il contatto di due metalli eterogenei; il che ha aperto un campo vasto alle ricerche dei fisici e dei chimici. I fenomeni singolari che risultano dall'estrema sensibilità dei nervi in alcuni individui, han dato origine a diverse opinio-

Digitized by Google

ni sull' esistenza di un nuovo agente che si è chiamato *magnetismo animale*, sull' azione del magnetismo ordinario, e l' influenza del sole e della luna in alcune affezioni nervose; finalmente sulle impressioni che può far provare la prossimità dei metalli o di un' acqua corrente. Pare naturale il pensare che l' azione di queste cagioni è debolissima e che può essere facilmente turbata da circostanze accidentali; così, perchè in alcuni casi essa non si è manifestata, non deesi perciò rigettare la sua esistenza. Noi siamo sì lontani dal conoscere tutti gli agenti della natura, e i loro diversi modi di azione, che sarebbe poco filosofico il negare i fenomeni, unicamente perchè essi sono inesplicabili nello stato attuale delle nostre cognizioni. Solamente noi dobbiamo esaminarle con un' attenzione tanto più scrupolosa, per quanto più difficile sembra di ammetterli; ed è in ciò che il calcolo delle probabilità addiviene indispensabile onde determinare fino a qual punto bisogna moltiplicare le osservazioni o l' esperienze ad oggetto di ottenere in favore degli agenti che essi indicano, una probabilità superiore alle ragioni che possono d' altronde aversi di non ammetterli.

Il calcolo delle probabilità può far valutare i vantaggi e gl' inconvenienti dei metodi adoperati nelle scienze congetturali. Così, per riconoscere il migliore dei trattamenti in uso nella guarigione di una malattia, basta provare ciascuno di essi sopra un medesimo numero di ammalati rendendo tutte le circostanze perfettamente simili; la superiorità del trattamento il più vantaggioso si manifesterà sempre più, a misura che questo numero si accrescerà; e il calcolo farà conoscere la probabilità corrispondente del suo vantaggio, e del rapporto secondo il quale esso è superiore agli altri.

Digitized by Google

CAP. V.

Applicazione del Calcolo delle Probabilità alle Scienze morali.

Abbiam veduto i vantaggi che l' analisi delle probabilità offre nella ricerca delle leggi dei fenomeni naturali le di cui cagioni sono occulte o troppo complicate perchè i loro effetti possano esser sottomessi a calcolo. Questo è il caso di pressochè tutti gli oggetti delle scienze morali. Sono tante le cagioni imprevedute, o occulte o inapprezzabili che influiscono sulle istituzioni umane, che è impossibile di giudicarne *a priori* i risultamenti. La serie degli avvenimenti che il tempo conduce, sviluppa questi risultamenti ed indica i mezzi di rimediare a quelli che sono nocivi. Si son fatte sovente a questo fine delle legge savie; ma perchè non si aveva avuto l' accortezza di conservarne i motivi, molte sono state abrogate come inutili, e per ristabilirle è stato necessario che esperienze triste né abbian fatto sentire di nuovo il bisogno. Stimo dunque molto interessante il tenere in ciascun ramo della pubblica amministrazione, un esatto registro degli effetti che han prodotto i diversi mezzi di cui si è fatto uso, e che sono tante esperienze fatte in grande dai governi. Applichiamo alle scienze politiche e morali il metodo fondato sull' osservazione e sul calcolo, metodo che ci ha sì ben servito nelle scienze naturali. Non opponghiamo una resistenza inutile e spesso pericolosa, agli effetti inevitabili del progresso dei lumi: ma non cangiamo che con una estrema circospezione le nostre istituzioni, e gli usi ai quali siamo da lungo tempo piegati. Noi conosciamo bene coll' esperienza del passato, gl' inconvenienti che essi presentano; ma ignoriamo qual' è l' estensione dei mali che il loro cangiamento può produrre.

Il calcolo delle probabilità è stato di già applicato con successo a molti oggetti delle scienze morali. Io vado a presentarne quì i principali risultamenti.

Digitized by Google

CAP. VI.

Della Probabilità delle testimonianze.

Come la maggior parte dei nostri giudizj sono fondati sulla probabilità delle testimonianze, è bene importante di sottometterla a calcolo. La cosa, egli è vero, addiviene sovente impossibile per la difficoltà di valutare la veracità dei testimonj, e per il gran numero delle circostanze da cui i fatti che essi attestano sono accompagnati. Ma nel primo caso si possono risolvere de' problemi che hanno molta analogia colle questioni che si propongono, e le di cui soluzioni possono essere riguardate come approssimazioni atte a guidarci ed a guarentarci dagli errori e dai pericoli ai quali cattivi ragionamenti ci espongono. Un' approssimazione di questo genere, quand' è ben condotta, è sempre preferibile ai ragionamenti i più speciosi. Tentiamo dunque di dare alcune regole generali per pervenirvi.

Si è estratto un sol numero da un' urna che ne contiene mille. Un testimonio di questa estrazione annunzia che il numero 79 è sortito: si chiede la probabilità di questa sortita. Supponiamo che l'esperienza abbia fatto conoscere che questo testimonio inganni una volta sopra dieci, in guisa che la probabilità della sua testimonianza sia nove decimi. Quì l'avvenimento osservato è il testimonio che attesta che il numero 79 è sortito. Questo avvenimento può risultare dalle due ipotesi seguenti, cioè che il testimonio enuncii la verità, o che inganni. Seguendo il principio che noi abbiamo esposto sulla probabilità delle cagioni, dedotta dagli avvenimenti osservati, bisogna principalmente determinare *a priori* la probabilità dell' avvenimento in ciascuna ipotesi. Nella prima, la probabilità che il testimonio annunzierà il numero 79 è la probabilità medesima della sortita di questo numero, cioè un millesimo. Bisogna moltiplicar questa per la probabilità nove decimi della veracità del testimonio; per la pro-

Digitized by Google

babilità dell' avvenimento osservato in questa ipotesi si avrà dunque nove diecimilesimi. Se il testimonio inganna, il numero 79 non è sortito; e la probabilità di questo caso è novecentonovantanove millesimi. Ma per annunziare la sortita di questo numero, il testimonio deve sceglierlo fra i novecentonovantanove numeri non sortiti; e come si suppone non aver egli alcun motivo di preferenza per gli uni piuttosto che per gli altri, la probabilità ch' egli sceglierà il numero 79 è un novecentonovantanovesimo; moltiplicando adunque questa probabilità per la precedente, si avrà un millesimo per la probabilità che il testimonio annunzierà il numero 79, nella seconda ipotesi. Bisogna ancora moltiplicare questa probabilità per la probabilità $\frac{1}{10}$ della stessa ipotesi; il cha dà un diecimilesimo per la probabilità dell' avvenimento, relativa a questa ipotesi. Or se si forma una frazione il di cui numeratore sia la probabilità relativa alla prima ipotesi, e 'l di cui denominatore sia la somma delle probabilità relative alle due ipotesi; si avrà, pel sesto principio, la probabilità della prima ipotesi e questa probabilità sarà $\frac{9}{10}$ cioè la veracità istessa del testimonio. Parimenti questa è la probabilità della sortita del numero 79. La probabilità del menzogna del testimonio e della non sortita di questo numero, è $\frac{1}{10}$.

Se il testimonio volendo ingannare, avesse qualche interesse a scegliere il numero 79 fra i numeri non sortiti; se giudicasse, a cagion d' esempio, che avendo situato su questo numero una posta considerevole, l' annunzio della sua sortita aumenterà il suo credito; la probabilità che egli sceglierà questo numero, non sarà più, come prima, un novecentonovantanovesimo; essa potrà essere allora $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ec., secondo l' interesse che egli avrà di annunziare la sua sortita. Supponendola $\frac{1}{9}$, bisognerà moltiplicare per questa frazione, la probabilità novecentonovantanove millesimi, per avere nell' ipotesi della menzogna, la probabilità dell' avvenimento osservato, che bisogna ancora moltiplicare per

Digitized by Google

$\frac{1}{10}$; il che dà centoundici diecimilesimi per la probabilità dell' avvenimento nella seconda ipotesi. In allora la probabilità della prima ipotesi, o della sortita del numero 79, si riduce per la regola precedente a nove centoventesimi. Essa è dunque eccessivamente indebolita dalla considerazione dell' interesse che il testimonio può avere ad annunziare la sortita del numero 79. Per verità, questo medesimo interesse aumenta la probabilità $\frac{9}{10}$ che il testimonio dirà la verità, se il numero 79 sorte. Ma questa probabilità non può eccedere l' unità o $\frac{1}{1}\frac{0}{0}$; così la probabilità della sortita del numero 79, non sorpassa dieci centoventunesimi. Il buon senso ci detta che quest' interesse deve ispirare della diffidenza ; ma il calcolo ne apprezza l' influenza.

La probabilità *a priori* del numero enunciato dal testimonio, è l' unità divisa pel numero dei numeri dell' urna: essa in virtù della testimonianza si trasforma, nella veracità istessa del testimonio ; può dunque la medesima essere indebolita da questa testimonianza Se, per esempio, l' urna non contiene che due numeri, il che dà una metà per la probabilità *a priori* della sortita del numero uno ; e se la veracità di un testimonio che l' annuncia è quattro decimi, questa sortita ne diviene meno probabile Visibil sembra in effetti che il testimonio avendo allora maggior propensione verso la menzogna che verso la verità ; la sua testimonianza dee diminuire la probabilità del fatto attestato, tutte le volte che questa probabilità eguaglia o sorpassa $\frac{1}{2}$. Ma se nell' urna vi sono tre numeri ; la probabilità *a priori* della sortita del numero uno, è accresciuta dall' affirmazione di un testimonio la di cui veracità sorpassa $\frac{1}{3}$.

Supponimo ora che l' urna contenghi novecentonovantanove palle nere ed una palla bianca, e che essendo stata estratta una palla, un testimonio dell'estrazione annunzia che questa palla è bianca. La probabilità dell' avvenimento osservato determinata *a priori* nella prima ipotesi, sarà quì, come nella questione precedente, eguale a nove diecimilesi-

Digitized by Google

mi. Ma nell' ipotesi in cui il testimonio inganni, la palla bianca non è sortita, e la probabilità di questo caso è novecentonovantanove millesimi. Bisogna moltiplicarla per la probabilità un decimo della menzogna, il che dà novecentonovantanove diecimilesimi per la probabilità dell' avvenimento osservato, relativa alla seconda ipotesi. Questa probabilità non era che un diecimilesimo nella questione precedente: questa gran differenza consiste in ciò che essendo sortita una palla nera, il testimonio che vuole ingannare non ha scelta veruna a fare fra le novecentonovantanove palle non sortite, per annunziare la sortita di una palla bianca. Or, se si formano due frazioni i di cui numeratori sieno le probabilità relative a ciascuna ipotesi, e 'l di cui denominatore comune sia la somma di queste probabilità, si avrà $\frac{9}{1008}$ per la probabilità della prima ipotesi e della sortita di una palla bianca, e $\frac{999}{1008}$ per la probabilità della seconda ipotesi e della sortita di una palla nera. Quest' ultima probabilità è molto approssimativa alla certezza: essa se ne avvicinerebbe molto più ancora, e diverrebbe $\frac{9999}{1000008}$ se l'urna contenesse un milione di palle di cui una sola sarebbe bianca; addiventando allora molto più straordinaria la sortita di una palla bianca. Ecco come la probabilità della menzogna cresce a misura che il fatto in quistione diviene più straordinario.

Noi abbiam supposto fin quì che il testimonio non s' ingannasse; ma se si ammette ancora la probabilità del suo errore, il fatto straordinario diventa più inverisimile. In allora in vece delle due ipotesi, si avranno le quattro seguenti; cioè, quella del testimonio che non inganna e che non s' inganna; quella del testimonio che non inganna e che s'inganna; l' ipotesi del testimonio che inganna e che non s'inganna; e finalmente quella del testimonio che inganna e s' inganna. Nel determinare *a priori* in ciascuna di queste ipotesi, la probabilità dell' avvenimento osservato; si trova pel sesto principio, la probabilità che il fatto attestato è

Digitized by Google

falso, eguale ad una frazione il di cui numeratore è il numero delle palle nere dell' urna, moltiplicato per la somma delle probabilità che il testimonio non inganna e s' inganna, o che inganna e non s' inganna, e 'l di cui denominatore è questo numeratore accresciuto della somma delle probabilità che il testimonio non inganna e non s' inganna, o che inganna e s' inganna contemporaneamente. Da ciò si vede che se il numero delle palle nere dell' urna è grandissimo, il che rende straordinaria la sortita della palla bianca; la probabilità che il fatto attestato non è, si accosta estremamente alla certezza.

Estendendo questa conseguenza a tutt' i fatti straordinarj, ne risulta che la probabilità dell' errore o della menzogna del testimonio diviene tanto più grande, quanto più straordinario è il fatto attestato. Alcuni autori hanno asserito il contrario pogiandosi sulla considerazione che la la vista di un fatto straordinario essendo perfettamente simile a quella di un fatto ordinario; i medesimi motivi debbon portarci a credere egualmente il testimonio, quando afferma l' uno o l' altro di questi fatti. Il semplice buon senso abbatte un'asserzione così strana: ma il calcolo delle probabilità, nel confirmare l' indicazione del senso comune, valuta altresì l' inverisimiglianza delle testimonianze su i fatti che noi riguardiamo come straordinarj.

Si suppongano due testimonj egualmente degni di fede, il primo de' quali attesti che egli ha visto morto fin da quindici giorni un individuo che il secondo testimonio afferma aver veduto jeri in florido stato di salute. L' uno o l' altro di questi fatti non offre nulla d' inverisimile. La resurrezione dell'individuo è una conseguenza del loro insieme; ma come le testimonianze non portano direttamente sopra di essa, ciò che la medesima ha di straordinario non dee punto indebolire la credenza che gli è dovuta (*).

(*) Vedete nell' *ENCYCLOPÈDIE*, art. *Certitude*.

Digitized by Google

Intanto, se la conseguenza che risulta dall' insieme delle testimonianze fosse impossibile, una di esse sarebbe necessariamente falsa; or una conseguenza impossibile è il limite delle conseguenze straordinarie, come l' errore è il limite delle inverisimiglianze; il valore delle testimonianze, che diviene nullo nel caso di una conseguenza impossibile, dee dunque essere molto affievolito in quello di una conseguenza straordinaria. Ciò è in effetti quel tanto che il calcolo delle probabilità conferma.

Per farlo vedere, consideriamo due urne A e B, la prima delle quali contenghi un milione di palle bianche, e la seconda, un milione di palle nere. Da una di queste urne si tiri una palla che si rimetta nell' altra urna da cui si estragga in seguito un' altra palla. Due testimonj, l' uno della prima estrazione, e l' altro della seconda, attestano che la palla che essi han visto estrarre, è bianca. Ciascuna testimonianza presa isolatamente non ha nulla d' inverisimile, ed è facile vedere che la probabilità del fatto attestato, è la veracità istessa del testimonio. Ma dall' insieme delle testimonianze segue che una palla bianca è stata estratta dall' urna A alla prima estrazione, e che quindi, messa nell' urna B, essa è ricomparsa alla seconda estrazione; ciò ch' è eccessivamente straordinario; imperocchè questa seconda urna contenendo allora una palla bianca sopra un milione di palle nere, la probabilità di estrarne la palla bianca è $\frac{1}{1000001}$. Per determinare l' affievolimento che ne risulta nella probabilità della cosa enunciata dai due testimonj, noi osserveremo che l' avvenimento osservato è qui l' affermazione per ciascuno di essi, che la palla ch' esso ha visto estrarre è bianca. Rappresentiamo con nove decimi la probabilità ch'esso enuncia la verità, il che può aver luogo nel caso presente, quando il testimonio non inganna e non s' inganna, e quando egli inganna del pari e s' inganna. Possonsi formare le quattro ipotesi seguenti.

1. Il primo e il secondo testimonio dicono la verità. Le

Digitized by Google

allora, una palla bianca è stata estratta la prima dall' urna A; e la probabilità di questo avvenimento è una metà, poichè la palla estratta alla prima estrazione ha potuto sortire egualmente dall' una e dall' altra urna. In seguito la palla estratta messa nell' urna B è ricomparsa alla seconda estrazione; la probabilità di questo avvenimento è $\frac{1}{1000001}$: la probabilità del fatto enunciato è dunque $\frac{1}{2000002}$. Moltiplicandola pel prodotto delle probabilità nove decimi e nove decimi che i testimonj dicono la verità; si avrà $\frac{81}{200002}$ per la probabilità dell' avvenimento osservato, in questa prima ipotesi.

2. Il primo testimonio dice la verità e il secondo non la dice, sia ch' egli inganni e non s' inganni, sia che non inganni e s' inganni. In allora una palla bianca è sortita dall' urna A al primo tiro, e la probabilità di questo avvenimento è una metà. In seguito questa palla essendo stata messa nell' urna B, n' è stata estratta una palla nera: la probabilità di questa estrazione è $\frac{1000000}{1000001}$, si ha dunque $\frac{1000000}{2000002}$ per la probabilità dell' avvenimento composto. Moltiplicandola per il prodotto delle due probabilità $\frac{9}{10}$ e $\frac{1}{10}$ che il primo testimonio dice la verità, e che il secondo non la dice; si avrà $\frac{900000}{2000002}$ per la probabilità dell' avvenimento osservato, nella seconda ipotesi.

3. Il primo testimonio non dice la verità, e il secondo l' enuncia. In allora è sortita una palla nera dall' urna B al primo colpo, e dopo essere stata messa nell' urna A, è stata estratta una palla bianca da quest' urna. La probabilità del primo di questi avvenimenti è una metà e quella del secondo è $\frac{1000000}{1000001}$; la probabilità dell' avvenimento composto è dunque $\frac{2000000}{2000002}$. Moltiplicandola per il prodotto delle probabilità un decimo e nove decimi, che il primo testimonio non dice la verità, e che il secondo l'enuncia; si avrà $\frac{900000}{2000002}$ per la probabilità dell' avvenimento osservato, relativa a questa ipotesi.

4. Finalmente, nessuno dei testimonj dice la verità. In

Digitized by Google

allora una palla nera è stata estratta dall' urna B alla prima estrazione ; essendo stata quindi messa nell' urna A , essa è ricomparsa alla seconda estrazione : la probabilità di questo avvenimento composto è $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}$. Moltiplicandola per i prodotti delle probabilità un decimo e un decimo che ciascun testimonio non dice la verità ; si avrà $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$ per la probabilità dell' avvenimento osservato , in questa ipotesi.

Or , per avere la probabilità della cosa enunciata dai due testimonj , cioè che in ciascuna dell' estrazioni è stata estratta una palla bianca, bisogna dividere la probabilità corrispondente alla prima ipotesi , per la somma delle probabilità relative alle quattro ipotesi , ed in allora per questa probabilità si ha $\frac{81}{1800} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{81}$, frazione estramamente piccola, come si vede.

Se dei due testimonj il primo affermasse che dall' una delle due urne A e B è stata estratta una palla bianca , il secondo , che è stata parimenti estratta una palla bianca dall' una delle due urne A_1 e B_1 , in tutto simili alle prime ; la probabilità della cosa enunciata dai due testimonj sarebbe il prodotto delle probabilità delle loro testimonianze o ottantuno centesimi ; essa sarebbe dunque centottantamila volte almeno più grande della precedente. Da ciò si vede quanto nel primo caso la ricomparsa al secondo colpo , della palla bianca estratta al primo, conseguenza straordinaria delle due testimonianze , ne indebolisce il valore.

Noi non presteremmo fede alcuna alla testimonianza di un uomo il quale ci attestasse che nel gittare cento dadi in aria ; questi sono ricaduti tutti sulla medesima faccia. Se fossimo stati noi medesimi spettatori di questo avvenimento , non crederemmo ai nostri propri occhi se non dopo averne scrupolosamente esaminate tutte le circostanze , per essere ben sicuri di non esservi stata illusione veruna. Ma dietro questo esame , non esiteremmo ad ammetterlo , malgrado la sua estrema inverisimiglianza ; e per ispiegarlo , nessuno

Digitized by Google

sarebbe tentato di ricorrere ad un prestigio prodotto da un rovescio delle leggi della visione. Noi dobbiam conchiudere che la probabilità della costanza delle leggi della natura, è per noi superiore a quella che l'avvenimento di cui si tratta non deve aver luogo, probabilità anch'essa superiore a quella della maggior parte dei fatti storici che riguardiamo come incontestabili. Da ciò si può giudicare del peso immenso delle testimonianze, necessario per ammettere una sospensione delle leggi della natura; e quanto sarebbe abusivo di applicare a questo caso le regole ordinarie della critica. Tutti coloro che senza offrire questa immensità di testimonianze, sostengono ciò che avanzano, racconti di avvenimenti contrarj a queste leggi, indeboliscono anzi che accrescono la credenza che cercano d'ispirare; perchè questi racconti rendono probabilissimo l'errore o la menzogna dei loro autori. Ma ciò che diminuisce la credenza degli uomini illuminati, sovente accresce quella del volgo; e noi ne abbiamo assegnato pecedentemente la ragione.

Vi sono delle cose talmente straordinarie, che non ve n'ha una che possa bilanciarne l'inverisimiglianza. Ma questa, per l'effetto di una opinione dominante, può essere indebolita a segno da comparire inferiore alla probabilità delle testimonianze; e quando questa opinione viene a cambiare, un assurdo racconto ammesso unanimamente nel secolo che gli ha dato origine, non offre ai secoli seguenti, se non una novella pruova dell'estrema influenza dell'opinione generale su i migliori talenti. Due uomini grandi del secolo di Luigi XIV., Racine e Pascal, ne sono due esempj che fanno stupore. Fa veramente pena il vedere con quale compiacenza, Racine, quell'ammirabile pittore del cuore umano e il poeta il più perfetto che giammai vi fosse (*), rapporta come miracolosa la guarigione della giovane Perrier,

(*) In Francia però. (*Il Trad.*).

Digitized by Google

nipote di Pascal e pensionaria nella badia di Porto Reale: dispiace nel leggere i ragionamenti coi quali Pascal cerca di provare che questo miracolo diveniva necessario alla religione, per giustificare la dottrina delle religiose di quella badia, in allora perseguitate dai Gesuiti. La giovine Perrier era afflitta da tre anni e mezzo da una fistola lacrimale: applicò ella al suo occhio ammalato una reliquia che pretendevasi essere una delle spine della corona del Salvatore, e si credè all' istante guarita. Dopo alcuni giorni i medici e i chirurgi contestarono la guarigione, e giudicarono che la natura ed i rimedj non vi avevano avuto parte alcuna. Questo avvenimento accaduto nel 1656, avendo fatto un gran senso alla generalità; « tutto Parigi, dice Racine, si portò a Porto Reale. La folla cresceva di giorno in giorno, « e lo stesso Dio sembrava compiacersi nell' autorizzare la « divozione dei popoli, colla quantità de'miracoli che si fe« cero in quella chiesa «. In quell' epoca i miracoli e i sortilegj non sembravano ancora inverisimili, e non si esitava ad attribuir loro le singolarità della natura, che non poteansi altrimenti spiegare.

Questa maniera di ravvisare gli effetti straordinarj, si trova nelle opere le più rimarchevoli del secolo di Luigi XIV, perfino nel Saggio sull'umano intendimento del Locke il quale parlando dei gradi di assenso dice: « quantunque la co« mune esperienza e 'l corso ordinario delle cose abbiano con « ragione una grande influenza sullo spirito degli uomini, « per portarli a dare od a negare il loro consenso ad una « cosa che si propone loro di credere; avvi non pertanto « un caso in cui ciò che vi è di strano in un fatto, non « indebolisce l' assenso che dobbiam dare alla testimonian« za sincera sulla quale questo assenso è fondato. Allorchè « avvenimenti soprannaturali sono conformi ai fini che si pro« pone colui che ha il potere di cambiare il corso della na« tura in tal tempo ed in tali circostanze; essi possono « essere tanto più atti a trovar credito nel nostro spirito,

Digitized by Google

« quanto più sono al di sopra delle osservazioni ordinarie, « o anche quanto più vi sono opposti. « I veri principj della probabilità delle testimonianze essendo stati in tal modo sconosciuti dai filosofi ai quali la ragione è principalmente debitrice dei suoi progressi; io ho creduto dover esporre estesamente i risultamenti del calcolo su quest' oggetto importante.

Quì si presenta naturalmente la discussione di un argomento famoso di Pascal, che Craig (*) ha riprodotto sotto una forma geometrica. Alcuni testimonj attestano che essi partecipano della divinità, che conformandosi a tal cosa, goderassi, non di una o di due, ma di una infinità di vite felici. Debole che sia la probabilità delle testimonianze, purchè non sia infinitamente piccola; è chiaro che il vantaggio di coloro che si uniformano alla cosa prescritta, è infinito, poichè è il prodotto di questa probabilità moltiplicata per un bene infinito: non decsi adunque bilanciare a procurarsi un tale vantaggio.

Questo argomento è fondato sul numero infinito delle vite felici promesse dai testimonj, in nome delle Divinità: Bisognerebbe dunque fare ciò ch' essi prescrivono, precisamente perchè essi esagerano le loro promesse al di là di tutt' i limiti, conseguenza che ripugna al buon senso. Così il calcolo ci fa vedere che questa esagerazione istessa indebolisce la probabilità della loro testimonianza fino a renderla infinitamente piccola o nulla. In effetti, questo caso è lo stesso di quello di un testimonio che annunciasse la sortita del numero il più alto da un' urna ripiena di una gran quantità di numeri de' quali uno solo è stato estratto, e che avrebbe un grande interesse ad annunziare la sortita di questo numero. Si è veduto di sopra quanto quest' interesse indebolisce la sua testimonianza. Valutando una metà la pro-

(*) Matematico inglese.

Digitized by Google

babilità che se il testimonio inganna, egli sceglierà il numero più grande; il calcolo dà la probabilità del suo annunzio, più piccola di una frazione il di cui numeratore è l'unità, e 'l di cui denominatore è l'unità del prodotto del numero dei numeri per la probabilità della menzogna, considerata *a priori* e indipendentemente dall'annunzio. Per assimilare questo caso, a quello dell'argomento di Pascal; basta rappresentare coi numeri dell'urna, tutt'i numeri possibili delle vite felici, il che rende infinito il numero dei numeri; e d'osservare che se i testimonj ingannano, essi hanno il più grande interesse per accreditare la loro menzogna, e promettere un'eternità di felicità. L'espressione della probabilità della loro testimonianza diviene allora infinitamente piccola. Moltiplicandola pel numero infinito delle vite felici promesse, l'infinito scomparisce dal prodotto che esprime il vantaggio risultante da questa promessa; il che distrugge l'argomento di Pascal.

Consideriamo ora la probabilità dell'insieme di molte testimonianze sopra un fatto determinato. Per fissare le idee, supponiamo che questo fatto sia la sortita di un numero da un'urna che ne contiene cento, e de' quali se n'è estratto uno solo. Due testimonj di questa estrazione annunziano che il numero uno è sortito; e si domanda la probabilità risultante dall'insieme di queste testimonianze. Si possono formare queste due ipotesi: i testimonj dicono la verità; i testimonj ingannano. Nella prima ipotesi, il numero uno è sortito, e la probabilità di questo avvenimento è un centesimo. Bisogna moltiplicarla pel prodotto delle veracità dei testimonj, veracità che supporremo nove decimi e sette decimi; si avrà dunque sessantatre diecimilesimi per la probabilità dell'avvenimento osservato, in questa ipotesi. Nella seconda, il numero uno non è sortito, e la probabilità di questo avvenimento è novantanove centesimi. Ma l'accordo dei testimonj esige allora che nel cercare d'ingannare, essi scegliessero tutti due il numero uno sopra i novantanove non

Digitized by Google

sortiti; la probabilità di questa scelta è il prodotto della frazione un novantanovesimo moltiplicato per se stesso; bisogna inseguito moltiplicare insieme queste due probabilità un decimo e tre decimi che i testimonj ingannano; si avrà in tal modo $\frac{1}{3300}$ per la probabilità dell' avvenimento osservato, nella seconda ipotesi. Or, la probabilità del fatto attestato o della sortita del numero uno si avrà col dividere la probabilità relativa alla prima ipotesi, per la somma delle probabilità relative alle due ipotesi; questa probabilità sarà dunque $\frac{2}{2}\frac{0}{0}\frac{7}{7}\frac{0}{0}$; e la probabilità della non sortita di questo numero e della menzogna dei testimonj sarà $\frac{1}{3}\frac{0}{0}\frac{7}{7}\frac{0}{0}$.

Se l' urna non contenesse che i numeri uno e due; si troverebbe dell' istessa maniera, ventuno ventiduesimi per la probabilità della sortita del numero uno, e per conseguenza un ventiduesimo per la probabilità della menzogna dei testimonj, probabilità novantaquattro volte almeno più grande della precedente. Da ciò si vede quanto la probabilità della menzogna dei testimonj diminuisce, quando il fatto che essi attestano è men probabile in se stesso. In effetti, si concepisce che in allora l' accordo de' testimonj, allorchè ingannano, diviene più difficile, a meno che essi non s' intendono; ciò che noi quì supponiamo di non aver luogo.

Nel caso precedente in cui l'urna non contenendo che due numeri, le probabilità *a priori* del fatto attestato è una metà; la probabilità risultante dalle testimonianze, è il prodotto delle veracità dei testimonj, diviso per questo prodotto aggiunto a quello delle probabilità rispettive della loro menzogna.

Ci rimane a considerare l' influenza del tempo, sulla probabilità dei fatti trasmessi da una catena tradizionale di testimonj. Egli è chiaro che questa probabilità dee diminuire a misura che la catena si prolunga. Se il fatto non ha alcuna probabilità per se stesso, quella che esso acquista dalle testimonianze, decresce secondo il prodotto continuo della veracità dei testimonj. Se il fatto in se stesso ha una proba-

Digitized by Google

bilità; se per esempio questo fatto è la sortita del numero uno da un' urna che ne contiene un numero finito, e da cui è certo che se n' è estratto uno solo; ciò che la catena tradizionale aggiunge a questa probabilità, decresce secondo un prodotto continuo, di cui il primo fattore è il rapporto del numero dei numeri dell' urna meno uno, a quest' istesso numero; e di cui ciascun altro fattore è la veracità di ciascun testimonio, diminuita del rapporto della probabilità della sua menzogna, al numero dei numeri dell'urna meno uno; in guisa che il limite della probabilità del fatto, è quello di questo fatto considerato *a priori* o indipendentemente dalle testimonianze, probabilità eguale all'unità divisa pel numero dei numeri dell' urna.

L' azione del tempo indebolisce dunque incessantemente la probabilità dei fatti storici, com' essa altera i monumenti i più durevoli. Per verità quest' azione si può rallentare moltiplicandola e conservando le testimonianze ed i monumenti che le sostengono. La stamperia offre per quest' oggetto, un gran mezzo, disgraziatamente non conosciuto dagli antichi. Malgrado gl' infiniti vantaggi che essa procura, le rivoluzioni fisiche e morali di cui la superficie di questo globo sarà sempre agitata, congiungendosi all' effetto inevitabile del tempo, finiranno col rendere dubbiosi dopo migliaja di anni, i fatti storici attualmente i più certi.

Craig ha tentato di assogettare a calcolo l' indebolimento graduale delle pruove della religione cristiana: supponendo che il mondo debba finire all' epoca in cui essa cesserà di essere probabile, egli trova che ciò dee accadere 1454 anni dopo il momento in cui ha scritto. Ma la sua analisi è tanto fallace, quanto bizzarra è la sua ipotesi sulla durata del mondo.

Digitized by Google

CAP. VII.

Della scelta e delle decisioni delle assemblee.

La probabilità delle decisioni di un' assemblea dipende dalla pluralità dei voti, dai lumi e dall' imparzialità dei membri che la compongono. Tante passioni ed interessi particolari vi mescolano sì spesso la loro influenza, che è impossibile di assoggettare questa probabilità al calcolo. Vi sono intanto alcuni risultamenti generali dettati dal semplice buon senso, e che il calcolo conferma. Se per esempio l'assemblea è pochissimo illuminata sull' oggetto sottomesso alla sua decisione, se quest' oggetto esige delle considerazioni delicate, o, se la verità su questo punto è contraria ai pregiudizj ricevuti, in guisa che vi sia più di uno contro uno a scommettere che ciascun votante se ne allontanerà; in allora la decisione della maggioranza sarà probabilmente cattiva, e 'l timore a questo riguardo sarà tanto più giusto, quanto più numerosa sarà l' assemblea. Interessa dunque alla causa pubblica che le assemblee non abbiano a pronunziare che sugli oggetti a portata del maggior numero: importa che l' istruzione sia generalmente diffusa, e che buone opere fondate sulla ragione e sull' esperienza, illuminino coloro che son chiamati a decidere del destino dei loro simili e a governarli, e li premuniscano altresì contro le false impressioni e le prevenzioni dell' ignoranza. I dotti hanno frequenti occasioni di osservare che le prime impressioni spesso ingannano, e che il vero non è sempre verisimile.

Fra le varietà delle opinioni dei membri di un' assemblea, è ben difficile il conoscere ed anche il definire il voto della medesima. Tentiamo di dare su di ciò alcune regole, considerando i due casi i più ordinarj, cioè l'elezione tra molti candidati, e quella tra molte proposizioni relative al medesimo oggetto.

Quando un' assemblea dee eleggere tra molti candidati che

Digitized by Google

si presentano per una o più posti del medesimo genere; ciò che pare il più semplice si è di fare scrivere a ciascun votante sopra un biglietto, i nomi di tutti i candidati, secondo l'ordine del merito ch'egli attribuisce loro. Supponendo che il candidato li classifichi di buona fede, l'ispezione di questi biglietti farà conoscere i risultamenti dell'elezioni, qualunque fosse la maniera colla quale i candidati sieno paragonati fra di loro; talmentecchè venendosi ad elezioni novelle non possa apprendersi nulla di più a questo riguardo. Trattasi ora di conchiuderne l'ordine di preferenza che i biglietti stabiliscono fra i candidati. Immaginiamo che a ciascun elettore siesi data un'urna la quale contenghi una infinità di palle mediante le quali possa mescolare tutti i gradi di merito dei candidati: supponiamo ancora ch'egli tiri dalla sua urna, un numero di palle proporzionale al merito di ciascun candidato, e supponiamo questo numero scritto sopra un biglietto, a fianco del nome del candidato. Si vede chiaramente che facendo una somma di tutti i numeri relativi a ciascun candidato sopra ciascun biglietto, quello di tutti i candidati che avrà la maggior somma, sarà il candidato che l'assemblea preferisce; e che in generale, l'ordine di preferenza dei candidati, sarà quello delle somme relative a ciascuno di essi. Ma i biglietti non segnano il numero delle palle che ciascun elettore dà ai candidati; indicano soltanto che il primo ne ha più del secondo, il secondo più del terzo, e così mano mano. Supponendo dunque al primo, sopra un dato biglietto, un numero qualunque di palle; tutte le combinazioni dei numeri inferiori, che adempiano le condizioni precedenti, sono egualmente ammissibili; e si avrà il numero delle palle relative a ciascun candidato, facendo una somma di tutti i numeri che ciascuna combinazione gli dà, e dividendola pel numero intero delle combinazioni. Un'analisi semplicissima fa vedere che i numeri che bisogna scrivere sopra ciascun biglietto al fianco dell'ultimo nome, del penultimo, ec., sono proporziona-

Digitized by Google

li ai termini della progressione artimetica 1, 2, 3, ec. Scrivendo dunque in tal modo in ciascun biglietto, i termini di questa progressione, ed aggiungendo i termini relativi a ciascun candidato su questi biglietti; le diverse somme indicheranno colla loro grandezza, l' ordine di preferenza che dev' essere stabilito tra i candidati. Tal' è il modo di elezione, che indica la teoria della probabilità. Senza dubbio sarebbe il migliore, se ciascun elettore scrivesse sul suo biglietto i nomi dei candidati, nell' ordine del merito che li attribuisce. Ma gl' interessi particolari e molte considerazioni estranee al merito, debbon turbare quest' ordine, e far situare delle volte all' ultimo posto, il candidato il più considerevole a quello che gli si preferisce; il che dà troppo vantaggio a' candidati di un merito mediocre. L' esperienza ha fatto quindi abbandonare questo metodo di elezione nei stabilimenti che l' avevano adottato.

L' elezione a maggioranza assoluta di suffragj, alla certezza di non ammettere alcuno dei candidati che questa maggioranza rigetta, riunisce il vantaggio di esprimere il più delle volte il voto dell' assemblea. Essa coincide sempre col modo precedente, quando non vi sono che due candidati. Per verità, essa espone all' inconveniente di rendere interminabili le elezioni. Ma l' esperienza ha fatto vedere che questo inconveniente è nullo, e che il desiderio generale di metter fine all' elezioni, riunisce ben presto la maggioranza dei suffragj sopra uno dei candidati.

La scelta tra molte proposizioni relative al medesimo oggetto, sembra dover essere assoggettata alle medesime regole che si adoperano per l' elezione tra molti candidati. Ma tra questi due casi vi esiste una differenza, ed è che il merito di un candidato non esclude quello dei suoi concorrenti; in vece che se le proposizioni tra le quali bisogna scegliere, sono contrarie; la verità dell' una esclude la verità delle altre. Ecco come io stimo doversi allora riguardare la questione.

Digitized by Google

Diamo a ciascun votante un' urna la quale contenghi un numero infinito di palle; e supponiamo ch' egli le distribuisca sulle differenti proposizioni, in ragione delle probabilità rispettive che le attribuisce. Si vede chiaro che il numero totale delle palle, esprimendo la certezza, ed essendo il votante assicurato, per l' ipotesi, che l' una delle proposizioni dev' esser vera; egli ripartirà questo numero in intero, sulle proposizioni. Il problema si riduce dunque a determinare le combinazioni nelle quali le palle saranno ripartite di modo che ve ne sieno più sulla prima proposizione che sulla seconda, più sulla seconda che sulla terza, ec.; a fare le somme di tutt' i numeri delle palle, relativi a ciascuna proposizione in queste diverse combinazioni; e a dividere questa somma pel numero delle combinazioni: i quozienti saranno i numeri delle palle, che debbonsi atrribuire alle proposizioni sopra un biglietto qualunque. Coll' analisi si trova che partendo dall' ultima proposizione, per risalire alla prima; questi quozienti sono tra loro come le quantità seguenti: 1. l' unità divisa pel numero delle proposizioni; 2. la quantità precedente aumentata dell' unità divisa pel numero delle proposizioni meno una; 3. questa seconda quantità aumentata dell' unità divisa pel numero delle proposizioni meno due; e così del rimanente. Si scriveranno adunque su ciascun biglietto, queste quantità a canto delle proposizioni corrispondenti; e aggiungendo le quantità relative a ciascuna proposizione, su i diversi biglietti; le somme indicheranno colla loro grandezza, l' ordine di preferenza che l'assemblea dà a queste proposizioni.

Facciam parola della maniera di rinnovare le assemblee elettive, le quali debbono cangiare in totalità in un determinato numero di anni.

Il rinnovamento dee farsi in una volta, o convien dividerlo tra questi anni? Secondo quest' ultimo metodo, l'assemblea sarebbe formata sotto l'influenza di diverse opinioni dominanti durante il suo rinnovamento; l' opinione che vi

Digitized by Google

regnerebbe allora, sarebbe dunque probabilissimamente la media di tutte queste opinioni. L' assemblea in tal modo riceverebbe dal tempo lo stesso vantaggio che gli dà l' estensione dell' elezioni dei suoi membri a tutte le parti del territorio che essa rappresenta. Or se si considera ciò che l' esperienza ha fatto abbastanza conoscere, cioè che le elezioni han sempre luogo nel senso il più esagerato delle opinioni dominanti; si conoscerà quanto utile sia il temperare queste opinioni le une colle altre, mercè un parziale rinnovamento (*).

CAP. VIII.

Della Probabilità de' Giudizj de' tribunali.

L' analisi conferma quel che il semplice buon senso ci detta, cioè che la bontà dei giudizj è tanto più probabile, quanto più numerosi e più illuminati sono i giudici. Egli è dunque interessante che i tribunali di appello riempiano queste due condizioni. I tribunali di prima istanza più vicini ai litiganti, offron loro il vantaggio di un primo giudizio di già probabile, e del quale il più delle volte essi si dichiarano contenti, sia mercè una transazione, sia col desistere dalle loro pretensioni. Ma se l' incertezza dell' oggetto litigioso, e la sua importanza determinano un litigante a ricorrere al tribunale di appello; egli, in una più gran pro-

(*) La Costituzione spagnuola, sotto il cui reggime abbiamo finalmente il bene di riposare, prescrive che *i membri delle Cortes dovranno cangiarsi in totalità in ogni biennio.* Allorchè il Parlamento Nazionale sarà per occuparsi dell' interessante oggetto delle modificazioni a questo Statuto, io mi auguro che la teoria di questo capitolo, non che le riflessioni che ne emergono, non sarà l' ultima ad esser presa in considerazione dai futuri Deputati. Ciò essendo, come non ne dispero, e indubitabile l' adozione più conseguente del sistema del rinnovamento parziale nell'elezione dei membri del potere legislativo. (*Il Trad.*).

Digitized by Google

babilità di ottenere un giudizio equo, dee trovare maggior sicurezza per la sua fortuna, e 'l compenso degl' imbarazzi e del dispendio che seco porta una nuova procedura. Ciò non avea luogo nella istituzione dell' appello reciproco dei tribunali di dipartimento, istituzione perciò pregiudizievolissima agl' interessi dei cittadini. Sarebbe forse conveniente e conforme al calcolo delle probabilità, di esigere una maggioranza di due voti almeno, in un tribunale di appello; onde annullare la sentenza del tribunale inferiore.

Discendo a considerare particolarmente i giudizj in materia criminale.

Per condannare un accusato bisogna senza dubbio che i giudici abbiano le più forti pruove del suo delitto. Ma una pruova morale è sempre una probabilità; e l' esperienza ha fatto pur troppo conoscere gli errori di cui i giudici criminali, quei per fino che sembrano essere i più giusti, sono ancora suscettibili.

La possibilità di riparare questi errori è il più robusto argomento dei filosofi, i quali han voluto proscrivere la pena di morte. Noi dovremmo dunque astenerci di giudicare, se bisognasse attendere l' evidenza matematica. Ma quando le pruove hanno una forza tale che il prodotto dell' errore da temersi moltiplicato per la sua debole probabilità sia inferiore al danno che risulterebbe dalla impunità del delitto, il giudizio è comandato dall' interesse della società. Se non m' inganno, questo giudizio si riduce alla soluzione della seguente questione. La pruova del delitto dell' accusato ha essa l' alto grado di probabilità necessaria, onde i cittadini abbiano meno a temere gli errori dei tribunali, se l' innocente è condannato; che i suoi nuovi attentati, e quei degl' infelici che la sua impunità fomenterebbe, se colpevole fosse assoluto? la soluzione di questa questione dipende da molti elementi difficilissimi a conoscere. Tal è l' imminenza del pericolo che minaccierebbe la società, se l' accusato restasse impunito. Delle volte questo pericolo è sì grande,

Digitized by Google

che il magistrato si vede costretto di rinunziare alle forme saggiamente stabilite per la sicurezza dell'innocenza. Ma ciò che rende quasi sempre insolubile la questione di cui si tratta, è l'impossibilità di valutare esattamente la probabilità del delitto e di fissare quella ch'è necessaria per la condanna dell'accusato. Ciascun giudice a questo riguardo è costretto rapportarsene al suo proprio tatto. Forma egli la sua opinione, paragonando le diverse testimonianze e le circostanze dalle quali il delitto è accompagnato, ai risultamenti delle sue riflessioni e della sua esperienza; e sotto questo rapporto, una lunga abitudine d'interrogare e di giudicare gli accusati, dà molti vantaggi per afferrare la verità in mezzo d'indizj spesso contraddittorj.

La questione precedente dipende ancora dalla gravezza della pena applicata al delitto; imperochè per pronunziare la morte esigonsi naturalmente delle pruove molto più forti che per infligere una detenzione di alcuni mesi. Ella è una ragione di proporzionare la pena al delitto; una pena grave applicata ad un delitto lieve farebbe inevitabilmente assolvere molti colpevoli (*). Il prodotto della probabilità del delitto per la gravezza dello stesso, essendo la misura del pericolo che l'assoluzione dell'accusato può far soffrire alla società; potrebbe pensarsi che la pena dee dipendere da questa probabilità. Ciò si fa indirettamente nei tribunali in cui ritiensi per qualche tempo l'accusato contro del quale si elevano pruove fortissime, ma insufficienti per condannarlo: nella veduta di acquistare nuovi lumi, non si restituisce immediatamente fra i suoi concittadini i quali non lo rivedrebbero senza vivi allarmi. Ma l'arbitrario di questa misura e l'abuso che può farsene, l'han fatta rigettare nei

(*) Val quanto dire, che se per pronunziare la pena di morte il giudice esige una pruova assai maggiore di quella per indursi a pronunziare una piccola pena; molti delinquenti, ove tal grado di pruova mancasse, resterebbero certamente assoluti. (*Il Trad.*)

Digitized by Google

paesi ne' quali si attacca il più gran pregio alla libertà individuale.

Or, qual' è la probabilità che la decisione di un tribunale, il quale non può condannare se non che ad una data maggioranza, sarà giusta, cioè conforme alla vera soluzione della questione stabilita di sopra? Questo importante problema, allorch' è ben risoluto, darà il mezzo di paragonare tra loro i tribunali diversi. La maggioranza di un voto solo in un numeroso tribunale, indica che l' affare di cui si tratta è soverchiamente dubbioso; la condanna dell' accusato sarebbe dunque allora contraria ai principj di umanità, protettori dell innocenza. L' unanimità dei giudici darebbe una grandissima probabilità di una decisione giusta; ma nel restringervisi, molti colpevoli sarebbero assoluti. Bisogna dunque o limitare il numero dei giudici, se si voglia che sieno unanimi; o accrescere la maggioranza necessaria per condannare, allorchè il tribunale addiviene numeroso. Io vado a tentare di applicare il calcolo a quest' oggetto, persuaso ch' esso è sempre la miglior guida, quando si poggia su dati che il buon senso suggerisce.

La probabilità che l' opinione di ciascun giudice è giusta, entra come elemento principale in questo calcolo. Questa probabilità è evidentemente relativa a ciascun affare. Se in un tribunale di 1001 giudici, 501 sono di una opinione e 500 sono dell' opinione contraria, è visibile che la probabilità dell' opinione di ciascun giudice sorpassa ben poco una metà; imperochè supponendola sensibilmente più grande, un sol voto di differenza sarebbe un avvenimento inverisimile. Ma se i giudici sono unanimi; ciò indica nelle prove, quel grado di forza che seco porta la convizione; la probabilità dell' opinione di ciascun giudice è dunque allora vicinissima all' unità o alla certezza; a meno che passioni o pregiudizj comuni non smarriscano contemporaneamente tutt' i giudici. Fuori di questo caso, il rapporto dei voti favorevoli o contrarj all' accusato, dee solo determinare questa

Digitized by Google

probabilità. Suppongo parimenti ch' essa può variare da una metà fino all' unità, ma che non può essere al disopra di una metà. Se ciò non fosse, la decisione del tribunale sarebbe insignificante come il caso: essa non ha valore che in quanto l' opinione del giudice ha maggior tendenza alla verità che all' errore. Quindi dal rapporto del numero dei voti favorevoli e contrarj all' accusato è che io determino la probabilità di questa opinione.

Questi dati bastano per avere l' espressione generale della probabilità che la decisione di un tribunale che giudica ad una nota maggioranza, è giusta. Nei tribunali in cui sopra otto giudici, cinque voti sarebbero necessarj per la condanna di un accusato; la probabilità dell' errore a temere sulla rettitudine della decisione, sorpasserebbe un quarto. Se il tribunale fosse ridotto a sei membri i quali non potessero condannare che alla pluralità di quattro voti; la probabilità dell' errore a temere, sarebbe al di sotto di $\frac{1}{4}$; vi sarebbe dunque per l' accusato un vantaggio a questa riduzione del tribunale. Nell' uno e nell' altro caso, la maggioranza esatta è la medesima ed eguale a due. Così questa maggioranza rimanendo costante, la probabilità dell' errore aumenta col numero dei giudici: ciò è generale, qualunque sia la maggioranza richiesta, purchè rimanga la stessa. Prendendo dunque per regola il rapporto artimetico; l' accusato si trova in una posizione sempre men vantaggiosa, a misura che il tribunale addiviene più numeroso. Si potrebbe credere che in un tribunale in cui si richiedesse una maggioranza di dodici voti, qualunque fosse il numero dei giudici; i voti della minorità, neutralizzando un simil numero di voti della maggioranza, i dodici voti residuali rappresenterebbero l' unanimità di un *jury* di dodici membri, richiesta in Inghilterra per la condanna di un accusato. Ma si sarebbe in un grand' errore. Il buon senso fa vedere che vi è differenza tra la decisione di un tribunale di duecento dodici giudici, cento dodici dei quali condannano l' accusato,

Digitized by Google

mentre che cento l' assolvono; e quella di un tribunale di dodici giudici unanimi per la condanna. Nel primo caso, i cento voti favorevoli all' accusato autorizzano a pensare che le prove sono lungi dall' acquistare quel grado di forza che porta la convizione: nel secondo caso, l' unanimità dei giudici concorre a far a credere ch' esse han conseguito questo grado. Ma il semplice buon senso non è sufficiente per valutare l' estrema differenza della probabilità dell' errore in questi due casi. Fa d' uopo allora ricorrere al calcolo, e si trova press' a poco un quinto, per la probabilità dell' errore nel primo caso, e solamente $\frac{1}{8192}$ per questa probabilità nel secondo caso, probabilità che non è un millesimo della prima. Una conferma del principio è che il rapporto aritmetico è disfavorevole all' accusato, quando il numero dei giudici aumenta. Al contrario, se si prende per regola il rapporto geometrico; la probabilità dell' errore della decisione diminuisce, quando si accresce il numero dei giudici. Per esempio, nei tribunali che non possono condannare se non alla pluralità di due terzi di voti; la probabilità dell' errore a temere è press' a poco un quarto, se il numero dei giudici è sei: essa è al di sotto di un settimo, se questo numero si eleva a dodici. Quindi, se si voglia che la probabilità dell' errore non sia giammai al di sopra, nè al di sotto di una determinata frazione, non si dee regolare nè sul rapporto artimetico, nè sul rapporto geometrico.

Ma qual' è la frazione cui debbesi fissare? quì è dove comincia l' arbitrario, e i tribunali a questo riguardo offrono delle grandi varietà. Nei tribunali speciali ove cinque voti sopra otto bastano per la condanna dell' accusato, la probabilità dell' errore a temere sulla bontà del giudizio, è $\frac{93}{256}$ o al di sopra di un quarto. La grandezza di questa frazione è sorprendente; ma ciò che dee alquanto assicurare è la considerazione che il più delle volte il giudice che assolve un accusato, non lo riguarda come innocente: egli pronuncia soltanto che l' accusato non è seguito da prove

sufficienti perchè sia condannato. Si è assicurato sopra tutto dalla pietà che la natura ha infuso nel cuore dell' uomo, e che dispone lo spirito a vedere con difficoltà un colpevole nella persona dell' accusato sottoposto al suo giudizio. Questo sentimento, più vivo in coloro che non hanno l' abitudine dei giudizj criminali, compensa gl' inconvenienti annessi alla inesperienza dei giurati. In un *jury* di dodici membri, se la pluralità richiesta per la condanna è di otto voti sopra dodici; la probabilità dell' errore a temere è millenovantatrè ottomilacentonovantaduesimi, o poco meno di un ottavo: essa è pressochè un ventiduesimo, se questa pluralità è di nove voti. Nel caso dell' unanimità, la probabilità dell' errore a temere è un ottomilacentonovantaduesimo, cioè più di mille volte minore che nei *jurys* di Francia.

La soluzione del problema che abbiamo considerato, non basta per fissare la maggioranza conveniente in un tribunale di un numero qualunque di giudici. Bisogna per ciò conoscere la probabilità del delitto, al di sotto della quale un accusato non può esser condannato, senza che i cittadini abbiano a paventare più gli errori dei tribunali che gli attentati che potrebbero nascere dalla impunità di un colpevole assoluto. Bisogna altresì determinare la probabilità del delitto, risultante dalla decisione del tribunale, e fissare la maggioranza, di modo che queste probabilità sieno eguali: ma l' ottenerle è impossibile. La prima, come abbiam detto, è relativa alla posizione nella quale si trova la società, posizione variabile, difficilissima a ben definire, e sempre troppo complicata per essere sottomessa a calcolo. La seconda probabilità dipende da una cosa interamente incognita, la legge di probabilità dell' opinione di ciascun giudice, nella stima ch' egli fa della probabilità del delitto. Vista la nostra ignoranza di questi due elemanti del calcolo, avvi cosa più ragionevole quanto il partire dalla soluzione del solo problema che potessimo risolvere in questa materia, quello cioè della probabilità dell' errore a temere sulla ret-

Digitized by Google

titudine della decisione di un tribunale? Questa probabilità mi sembra troppo forte nei nostri tribunali, ed io penso che a questo riguardo conviene avvicinarsi al *jury* inglese ov' essa non è se non di un ottomilaceptonovantaduesimo. Fissandola alla frazione un milleventiquattresimo, e determinandone la maggioranza necessaria per conseguirla, si situa l' accusato nella posizione in cui sarebbe al cospetto di un *jury* di nove membri di cui si esigerebbe l' unanimità; il che mi sembra guarentire bastantemente l' innocenza dagli errori dei tribunali, e la società dai mali che l' impunità dei colpevoli cagionerebbe. Dev' essere estremamente raro allora che un accusato sia condannato con una probabilità minore di quella ch' è necessaria alla sua condanna; imperochè la maggioranza che lo condanna, dichiara che la probabilità del suo delitto è almeno eguale a questa probabilità necessaria: la minorità che l' assolve, dichiara che la prima di queste probabilità le sembra inferiore alla seconda. Ma è naturale di credere che questa inferiorità è poco considerevole; dovrà dunque rare volte accadere che la probabilità media che risulta dall' insieme dei giudizj del tribunale, sia inferiore alla probabilità richiesta per la condanna dell' accusato; se si riduce con una maggioranza conveniente, la probabilità dell' errore a temere sulla rettitudine della decisione del tribunale, alla frazione un milleventiquattresimo. Per ottenere questa maggioranza, l' analisi fornisce delle formule ch' è facile di ridurre in tavole dipendenti dal numero dei giudici. Ma tavole di tal fatta sembreranno troppo arbitrarie alla maggior parte degli uomini che preferiranno sempre l' uno o l' altro dei rapporti aritmetico e geometrico, ch' essi possono agevolmente concepire.

Digitized by Google

CAP. IX.

Delle Tavole di mortalità, e delle durate medie della vita, dei matrimonj e della associazioni qualunque.

La maniera di formare le tavole di mortalità è semplicissima. Su i registri di nascita e di morte si prende un gran numero di bambini che si segue durante la loro vita, determinando quanto ne rimane alla fine di ciascun anno; e si scrive questo numero incontro all' anno scadente. Quindi s' iscrive incontro a zero il numero dei bambini; incontro all' unità il numero di coloro che han compito l' anno; incontro a due il numero di quei che han compito i due anni, e così di seguito. Ma siccome nei due primi anni della vita la mortalità è rapidissima; per maggior esattezza, bisogna indicare in questa prima età il numero dei sopravviventi alla fine di ciascun semestre.

Se la somma degli anni della vita di tutti gl' individui iscritti in una tavola di mortalità si divide pel numero di quest' individui; si avrà la durata media della vita, che corrisponde a questa tavola. Per ciò si moltiplicherà per la metà di un anno il numero dei morti nel primo anno, numero eguale alla differenza degl' individui iscritti incontro a zero, e incontro all unità: la loro mortalità potendo essere egualmente ripartita sull' anno intero, la durata media della loro vita non è che un mezzo anno. Si moltiplicherà per un anno $\frac{1}{2}$ il numero de' morti nel 2 anno, per due anni e mezzo, il numero dei morti nel terzo anno, e così del rimanente: la somma di questi prodotti, divisa pel numero delle nascite sarà pressochè la durata media della vita. La durata media di quanto rimane a vivere partendo da un' età qualunque, si determina, operando sul numero degl' individui che sono giunti a quest' età, come si è di già fatto sul numero delle nascite. Non è al momento della nascita che la durata media della vita è più grande, bensì allorchè si sono evitati i pericoli della prima infanzia, e quando essa

Digitized by Google

è di circa quarantatrè anni. La probabilità di giungere ad una età qualunque, partendo da una data età, è eguale al rapporto dei due numeri d'individui, indicati nella tavola a queste due età.

La precisione di questi risultamenti esige che per la formazione delle tavole s' impieghi un grandissimo numero di nascite. L' analisi dà allora delle formule semplicissime per valutare la probabilità che i numeri indicati in queste tavole non si discosteranno dalla verità, che in limiti angusti. Con queste formule si vede che l' intervallo dei limiti diminuisce e che la probabilità aumenta, a misura che si considerano più nascite; in guisa che le tavole rappresenterebbero esattamente la vera legge della mortalità, se infinito divenisse il numero delle nascite impiegate.

Una tavola di mortalità è dunque una tavola delle probabilità della vita umana. Il rapporto degl' individui iscritti a fianco di ciascun anno, al numero delle nascite, è la probabilità che un nuovo nato giungerà a quest' anno. Come si stima il valore della speranza, facendo una somma dei prodotti di ciascun bene sperato, moltiplicato per la probabilità di ottenerlo; così dal pari si può valutare la durata media della vita, aggiungendo i prodotti di ciascun anno moltiplicati per la probabilità di pervenirvi. Quindi, formando una serie di frazioni il di cui denominatore comune sia il numero dei nuovi nati della tavola, e i di cui numeratori sieno i numeri iscritti a fianco di ciascun anno partendo da zero; la somma di tutte queste frazioni sarà la durata media della vita, da cui, per maggior esattezza, bisogna sottrarre un mezzo anno; il che conduce al medesimo risultamento della regola precedente. Ma questa maniera di ravvisare la durata media della vita, ha il vantaggio di far vedere che in una popolazione stazionaria, cioè tale che il numero delle nascite eguagli quello delle morti; la durata media della vita è il rapporto istesso della popolazione alle nascite annuali; imperochè la popolazione essendo supposta stazionaria, il numero de-

Digitized by Google

gl' individui di un' età compresa tra due anni consecutivi della tavola, è eguale al numero delle nascite annuali, moltiplicato per la metà della somma delle probabilità di giungere a questi anni: la somma di tutti questi prodotti sarà dunque la popolazione intera. Or è agevole il vedere che questa somma divisa per il numero delle nascite annuali, coincide colla durata media della vita, come l' abbiam di già definito.

Mercè una tavola di mortalità è facile il formare la tavola corrispondente della popolazione supposta stazionaria. Per ciò si prendono delle medie aritmetiche tra i numeri della tavola di mortalità corrispondenti alle età, zero ed un anno, uno e due anni, due e tre anni, ec. La somma di tutte queste medie è la popolazione intera: si scrive a fianco dell' età zero. Si sottrae da questa somma, la prima media; e 'l residuo è il numero degl' individui di un anno e al di sopra: si scrive a fianco dell' anno 1. Si sottrae da questo primo residuo, la seconda media; questo secondo residuo è il numero degl' individui di due anni, e al di sopra: si scrive a fianco dell' anno 2; e così progredendo innanzi.

Sono tante le cagioni variabili che influiscono sulla mortalità, che le tavole che le rappresentano, debbono cangiare secondo i luoghi e i tempi. I diversi stati della vita offrono a questo riguardo sensibili differenze relative alle fatiche ed ai pericoli inseparabili di ciascuno stato, e di cui è indispensabile il tener conto nei calcoli fondati sulla durata della vita. Ma queste differenze non sono state ancora sufficientemente osservate. Esse lo saranno un giorno. Si saprà allora quale sacrificio della vita ciascuna professione esige, e profitterassi di queste conoscenze onde diminuirne i pericoli.

La salubrità più o men grande del suolo, la sua elevazione, la sua temperatura, i costumi degli abitanti, e le operazioni del governo hanno una influenza considerevole

Digitized by Google

sulla mortalità. Ma bisogna far sempre precedere la ricerca della causa delle differenze osservate, da quella della probabilità colla quale questa causa è indicata. Quindi il rapporto della popolazione alle nascite annuali, che si è visto elevarsi in Francia a ventotto e un terzo, non è eguale a venticinque nell' antico ducato di Milano. Questi rapporti stabiliti entrambi sopra un gran numero di nascite, non permettono di rivocare in dubbio l' esistenza di una causa speciale di mortalità nei Milanesi, causa che interessa al governo di quel paese di ricercare e quindi di distruggere.

Il rapporto della popolazione alle nascite si accrescerebbe ancora, se si giungesse a diminuire o a distruggere alcune malattie pericolose e molto diffuse. Ciò si è fatto felicemente per il vajuolo, prima coll inoculazione di questa malattia; quindi in un modo molto più vantaggioso, coll' inoculazione della vaccina, scoperta inestimabile di Jenner per cui quest' uomo si è reso uno dei più grandi benefattori dell' umanità.

Il vajuolo ha ciò di particolare, cioè che un medesimo individuo non n' è due volte affetto, od almeno questo caso è si raro, che se ne può fare astrazione nel calcolo. Questa malattia da cui pochi eran coloro che immuni rimanevano prima della scoperta della vaccina, è sovente mortale e fa perire un settimo in circa di coloro che ne vengono attaccati. Delle volte essa è benigna, e l' esperienza ha fatto conoscere che le si dava quest' ultimo carattere, inoculandola sopra persone sane predisposte con un buon governo, ed in una stagione favorevole. Allora il rapporto degl' individui che essa fa perire, agl' inoculati, non giunge ad un trecentesimo. Questo grande vantaggio della inoculazione, annesso a quelli di non alterare la bontà, e di preservare da moleste conseguenze che naturalmente il vajuolo porta seco il più delle volte, la fece adottare da un gran numero di persone. La sua pratica fu vivamente raccomandata; ma fu altresi combattuta, come quasi sempre succe-

Digitized by Google

de nelle cose soggette a degl' inconvenienti. Nel bollore di questa disputa, Daniele Bernulli si propose di assoggettare al calcolo delle probabilità, l' influenza dell' inoculazione sulla durata media della vita. Mancando di dati precisi sulla mortalità prodotta dal vajuolo alle differenti età della vita; Bernulli suppose che il pericolo di avere questa malattia e di morirne, sono le medesime in tutte l' età. Nel corso di queste supposizioni, egli pervenne con un' analisi delicata a convertire una tavola ordinaria di mortalità in quelle che avrebbero luogo se il vajuolo non esistesse, o se non facesse perire che un picciol numero di ammalati; e ne dedusse che l' inoculazione accrescerebbe almeno di tre anni la durata media della vita; il che gli parve mettere fuori dubbio il vantaggio di questa operazione. D' Alembert attaccò l' analisi di Bernulli, prima sull'incertezza delle sue due ipotesi; quindi sulla sua insufficienza consistente in ciò che non vi si facea entrare la comparazione del pericolo prossimo, quantunque piccolo, di morire per l'inoculazione, al pericolo molto più grande ma più remoto, di soccombere al vajuolo naturale. Questa considerazione che svanisce allorchè si considera un gran numero d' individui, è per ciò indifferente ai governi, e lascia sussistere per essi i vantaggi della inoculazione; ma è di un gran peso per un padre di famiglia, il quale facendo inoculare i proprj figli, dee temere di veder perire quanto prima colui che ha di più caro al mondo, e di esserne la causa. Molti genitori erano ritenuti da questo timore che la scoperta della vaccina ha felicemente dissipato. Per effetto di uno di quei misteri che la natura ci offre con tanta frequenza, il pus vaccino è un preservativo del vajuolo, sicuro quanto lo è la marcia vajolica: esso non espone a malattia veruna, ed esige pochissime cure. Quindi la sua pratica si è prontamente diffusa; e per renderla universale, non altro rimane a vincersi se non l'inerzia naturale del popolo, contro la quale convien lottare incessantemente, anche quando si tratta dei suoi più cari interessi.

Digitized by Google

Il mezzo il più semplice di calcolare il vantaggio che produrrebbe l'estinzione di una malattia, consiste nel determinare coll' osservazione, il numero d' individui di una data età, ch' essa fa perire in ciascun anno, ed a sottrarlo dal numero dei morti alla medesima età Il rapporto della differenza, al numero totale d' individui della data età, sarebbe la probabilità di perire nell' anno, a quest' età, se la malattia non esistesse. Facendo dunque una somma di queste probabilità dalla nascita fino ad una età qualunque, e sottraendo questa somma dall' unità; il residuo sarà la probabilità di vivere fino a questa età, corrispondente alla estinzione della malattia. La serie di queste probabilità sarà la tavola di mortalità, relativa a questa ipotesi; e da ciò che precede se ne dedurrà la durata media della vita. In tal modo Duvilard ha trovato che l' accrescimento della durata media della vita, dovuto alla inoculazione della vaccina, è di tre anni almeno. Un accrescimento così considerevole ne produrrebbe uno grandissimo nella popolazione, se d' altronde questa non fosse ristretta dalla diminuzione relativa delle sussistenze.

Il corso progressivo della popolazione si è principalmente arrestato per la mancanza dalle sussistenze. In tutte le specie di animali e di vegetabili, la natura tende incessantemente ad accrescere il numero degl' individui, finchè sieno a livello dei mezzi di sussistenza. Nella specie umana le cagioni morali hanno una grande influenza sulla popolazione. Se il suolo con una facile cultura può fornire un sufficiente nutrimento a nuove generazioni; la certezza di far vivere una famiglia numerosa, incoraggisce i matrimonj e li rende più precoci e più fecondi. Sopra un suolo di tal fatta, la popolazione e le nascite debbon crescere contemporaneamente in progressione geometrica. Ma quando le culture addivengono più difficili e più rare; in allora l' accrescimento della popolazione diminuisce: essa si approssima continuamente allo stato vario delle sussistenze, facendo intorno di lui delle oscilla-

Digitized by Google

zioni, press' a poco come un pendolo che si agita con movimento ritardato intorno al punto di sospensione, oscilla intorno a questo punto per effetto della sua gravità. Il *maximum* di accrescimento della popolazione è difficile a valutarsi: dietro alcune osservazioni pare che in circostanze favorevoli, la popolazione dell' umana specie potrebbe raddoppiare, ogni quindici anni. Si stima che nell' America settentrionale, il periodo di questo raddoppio è di anni venticinque. In questo stato di cose; la popolazione, le nascite, i matrimonj, la mortalità, tutto cresce a tenore della medesima progressione geometrica di cui si ha il rapporto costante dei termini consecutivi, coll'osservazione delle nascite annuali a due epoche.

Siccome una tavola di mortalità rappresenta le probabilità della vita umana; si può mediante la stessa determinare la durata dei matrimonj. Per meglio spiegarci supponiamo che la mortalità sia la stessa per i due sessi; si avrà la probabilità che il matrimonio sussisterà un anno, o due, o tre, ec.; formando una serie di frazioni il di cui denominatore comune sia il prodotto dei due numeri della tavola, corrispondenti all' età dei congiunti, e i di cui denominatori sieno i prodotti successivi dei numeri corrispondenti a quest' età aumentati di uno, di due, di tre, ec. anni. La somma di queste frazioni, aumentata di una metà, sarà la durata media del matrimonio, essendo preso l' anno per unità. La medesima regola si può facilmente estendere alla durata media di un'associazione formata da tre o da un maggior numero d' individui.

Digitized by Google

CAP. X.

Dei beneficj dei stabilimenti che dipendono dalla probabilità degli avvenimenti.

Ricordiamo quì ciò che abbiam detto parlando della speranza. Si è visto che per avere il vantaggio che risulta da molti avvenimenti semplici di cui gli uni producono un bene, e gli altri una perdita; bisogna aggiungere i prodotti della probabilità di ciascun avvenimento favorevole pel bene ch' esso procura, e sottrarre dalla loro somma quella dei prodotti della probabilità di ciascun avvenimento disfavorevole, per la perdita che vi è annessa. Ma qualunque sia il vantaggio espresso dalla differenza di queste somme, un solo avvenimento composto da questi avvenimenti semplici, non guarentisce dal timore di soffrire una perdita reale. Si concepisce che questo timore dee diminuire allorchè si moltiplica l' avvenimento composto. L' analisi delle probabilità conduce a questo teorema generale.

Colla ripetizione di un avvenimento vantaggioso, semplice o composto, il beneficio reale diviene sempre più probabile, e si accresce incessantemente: esso addivien certo, nell' ipotesi di un numero infinito di ripetizioni; e dividendolo per questo numero, il quoziente o il beneficio medio di ciascun avvenimento, è la speranza matematica, o il vantaggio relativo all' avvenimento. Lo stesso è della perdita che col tempo addivien certa, per poco che l' avvenimento sia disvantaggioso.

Questo teorema su i beneficj e le perdite è analogo a quelli che abbiamo dato precedentemente su i rapporti che indica la ripetizione indefinita degli avvenimenti semplici o composti; e com' essi, prova che la regolarità finisce collo stabilirsi nelle cose anche le più subordinate a ciò che chiamiamo *azzardo*.

Quando gli avvenimenti sono in gran numero, l'analisi

Digitized by Google

dà ancora una espressione semplicissima della probabilità che il beneficio reale sarà compreso in limiti determinati, espressione che rientra nella legge generale della probabilità, che abbiam dato di sopra, allorchè abbiamo parlato delle probabilità che risultano dalla moltiplicazione indefinita degli avvenimenti.

Dalla verità del teorema precedente dipende la durata dei stabilimenti fondati sulle probabilità. Ma perchè possa essere loro applicata, bisogna che questi stabilimenti, per numerosi affari, moltiplichino gli avvenimenti vantaggiosi.

Si sono fondate sulle probabilità della vita umana diversi stabilimenti, non altrimenti che le rendite vitalizie e le tontine. Il metodo il più generale e il più semplice di calcolare i benefici e i pesi di questi stabilimenti, consiste a ridurli in capitali attuali. L'interesse annuale dell'unità, è ciò che addimandasi *tassa dell'interesse*. Alla fine di ciascun anno, un capitale acquista per fattore l'unità più la tassa dell'interesse, esso cresce dunque giusta una progressione geometrica di cui questo fattore è la ragione. Quindi per l'effetto del tempo esso addiviene immenso. Se per cagion d'esempio la tassa dell'interesse è un decimo o del cinque per cento; il capitale raddoppia in circa quattordici anni, quadrupla in ventinove anni, ed in meno di tre secoli addiviene due milioni di volte più considerevole.

Un accrescimento cotanto prodigioso ha fatto nascere l'idea di avvalersene per estinguere il debito pubblico. Se si crea un primo fondo di ammortizzazione che si situa incessantemente cogl'interessi sugli effetti pubblici, profittando soprattutto dei momenti di calo della moneta; e se quando i bisogni dello stato obbligano a fare degl'impronti, se ne consacra una porzione all'accrescimento dei fondi di ammortizzazione; è visibile che queste operazioni avranno il doppio vantaggio di accrescere questi fondi, e di sostenere il credito e gli effetti pubblici; e che alla lunga la cassa di ammortizzazione assorbirà una gran porzione del debito nazionale,

Digitized by Google

Felici esperienze han pienamente confermato questi vantaggi. Ma la fedeltà nelle promesse e la stabilità, sì necessarie ai successi di stabilimenti di tal fatta, non possono essere ben guarentiti che da un governo in cui il potere legislativo è diviso in molti rami (*). La confidenza che ispira il concorso necessario di questi rami raddoppia la forza dello stato; e il sovrano (**) guadagna in potere legale, molto più che non perde in potere arbitrario.

Da ciò che abbiam detto risulta che il capitale attuale equivalente ad una somma che dev' esser pagata dopo un certo numero di anni, è eguale a questa somma moltiplicata per la probabilità ch' essa sarà pagata a quell' epoca, e divisa per l' unità aumentata dalla tassa dell' interesse, inalzata ad una potenza espressa dal numero di questi anni.

Questo principio si può facilmente applicare alle rendite vitalizie sopra una o molte teste, e alle casse di risparmio e di assicurazione di una natura qualunque. Supponiamo che si proponga di formare una tavola di rendite vitalizie, a norma di una tavola data di mortalità. Una rendita vitalizia pagabile alla scadenza di cinque anni, per esempio, e ridotta in capitale attuale, è per questo principio eguale al prodotto delle due quantità seguenti, cioè la rendita divisa per la quinta potenza dell' unità aumentata dalla tassa dell' interesse, e la probabilità di pagarla. Questa probabilità è il rapporto inverso del numero degl' individui iscritti nella tavola, incontro all' età di colui che costituisce la rendita, al numero iscritto incontro a quest' età

(*) Nella felice posizione in cui ci troviamo è indubitabile che la Rappresentanza nazionale, istallata appena nel prossimo ottobre, verrà classificata nel senso favorevole a questa idea di Laplace (*Il Trad.*).

(**) Vi sono ancora di coloro che attaccano il vecchio significato a questo vocabolo. Ricordiamci del tesoro inestimabile contenuto nell' articolo 3 della Costituzione di Spagna. (*Il Trad.*).

Digitized by Google

aumentata di cinque anni. Formando dunque una serie di frazioni i di cui denominatori sieno i prodotti del numero delle persone indicate nella tavola di mortalità, come viventi all' età di colui che costituisce la rendita, moltiplicato per le potenze successive dell' unità aumentata della tassa dell' interesse, e i di cui numeratori sieno i prodotti della rendita, per il numero delle persone viventi alla medesima età aumentato successivamente di un anno, di due anni, ec.; la somma di queste frazioni sarà il capitale richiesto per la rendita vitalizia a quest' età.

Supponiamo ora che una persona, col mezzo di una rendita vitalizia, voglia assicurare ai suoi eredi un capitale pagabile alla fine dell' anno di sua morte. Per determinare il valore di questa rendita, si può immaginare che la persona impronti in vitalizio ad una cassa questo capitale diviso per l' unità aumentata della tassa dell' interesse, e che lo situi ad interesse perpetuo alla medesima cassa. Si vede chiaramente che questo capitale sarà dovuto dalla cassa, ai suoi eredi, alla fine dell' anno di sua morte; ma essa non avrà pagato in ciascun anno se non l' eccesso dell' interesse vitalizio sull' interesse perpetuo. La tavola delle rendite vitalizie farà dunque conoscere quel tanto che la persona dee pagare annualmente alla cassa, per assicurare questo capitale dietro la sua morte.

Le assicurazioni marittime, quelle contro gl' incendj e le procelle, e tutti in generale gli stabilimenti di questo genere, si calcolano coi medesimi principj. Un negoziante ha dei vascelli in mare, e vuole assicurare il loro valore e quello dei loro carichi, contro i pericoli che possono correre: dà per ciò una somma ad una compagnia che gli risponde del valore stimato dei suoi carichi e dei suoi vascelli. Il rapporto di questo valore alla somma che dev' esser data per prezzo dell' assicurazione, dipende dai pericoli ai quali i vascelli sono esposti, e non può essere apprezzato che con delle numerose osservazioni sulla sorte dei vascelli partiti dal porto per lo stesso destino

Digitized by Google

Se il negoziante non dasse alla compagnia di assicurazione che la somma indicata dal calcolo delle probabilità; questa compagnia non potrebbe provvedere alle spese del suo stabilimento; bisogna dunque che paghi di una somma più forte il prezzo della sua assicurazione. Ma in allora qual' è il suo vantaggio? Quì diviene necessaria la considerazione della speranza morale. Si concepisce che il giuoco il più eguale divenendo disvantaggioso, come si è veduto di sopra, perchè il giuocatore cambia una posta certa contro un beneficio incerto; l' assicurazione colla quale si cambia l'incerto contro il certo, dev' esser vantaggiosa. Ciò in effetti risulta dalla regola che abbiamo dato di sopra per determinare la speranza morale, e dalla quale si vede di più fin dove può estendersi il sacrificio che dee farsi alla compagnia di assicurazione, conservando sempre un vantaggio morale. Questa compagnia dunque nel procurare questo vantaggio, può fare anch' essa un sacrificio se il numero dei suoi affari è considerevolissimo, condizione necessaria alla sua durevole esistenza. In allora il suo beneficio addivien certo, e le sue speranze matematica e morale coincidono. Imperochè l' analisi conduce a questo teorema generale, cioè, che se le aspettative sono numerosissime, le due speranze si accostano incessantemente l' una all' altra, e finiscono col coincidere nel caso di un numero infinito di aspettative.

Fra i stabilimenti fondati sulle probabilità della vita umana, i più utili son quelli nei quali mediante un leggero sacrificio della sua rendita, si assicura l' esistenza della sua famiglia per un tempo in cui deesi temere di non più bastare ai suoi bisogni. Per quanto il giuoco è immorale, altrettanto questi stabilimenti sono vantaggiosi ai costumi, favorendo le più dolci propensioni della natura. Il governo dee dunque incoraggiarle e rispettarle nelle sue vicissitudini; imperochè le speranze che essi presentano, portando sopra

Digitized by Google

un avvenire remoto, non possono prosperare che al coperto di ogn' inquietezza sulla loro durata.

Diciamo qualche cosa degl' improntì. Egli è chiaro che per improntare in perpetuo, bisogna pagare in ciascun anno il prodotto del capitale per la tassa dell' interesse. Ma si può voler acquistare questo capitale in pagamenti eguali fatti durante un numero determinato di anni, pagamenti che si chiamano *annualità*, e dalle quali si ottiene parimenti il valore. Ciascun' annualità, per essere ridotta al momento attuale, dev' esser divisa per l' unità aumentata della tassa dell' interesse, e inalzata ad una potenza eguale al numero degli anni dietro i quali quest' annualità si dee pagare. Formando dunque una progressione geometrica di cui il primo termine sia l' annualità divisa per l' unità aumentata della tassa dell' interesse, e l'ultimo della quale sia quest' annualità divisa per la medesima quantità inalzata ad una potenza eguale al numero degli anni durante i quali il pagamento deve aver luogo; la somma di questa progressione sarà equivalente al capitale improntato; il che determina il valore dell' annualità. Se si voglia fare un impronto vitalizio, si osserverà che le tavole di rendite vitalizie dando il capitale richiesto per costituire una rendita vitalizia, ad una età qualunque; una semplice proporzione darà la rendita che dee farsi all' individuo da cui s' impronta un capitale. Con questi principj si possono calcolare tutt' i modi possibili d' impronto.

CAP. XI.

Delle illusioni nella stima delle probabilità.

Lo spirito ha le sue illusioni come il senso della vista; e come queste vengono rettificate dal tatto, la riflessione e il calcolo correggono le prime. La probabilità fondata sopra una esperienza giornaliera, o esagerata dal timore e dalla

Digitized by Google

speranza, ci colpisce più che una probabilità superiore, ma non è che un semplice risultamento del calcolo. Quindi noi non temiamo per piccoli vantaggi, di esporre la nostra vita a de' pericoli molto meno inverisimili della sortita di un quinterno alla lotteria di Francia; ed intanto nessuno vorrebbe procurarsi i medesimi vantaggi, colla certezza di perdere la vita, se questo quinterno uscisse.

Le nostre passioni, i nostri pregiudizj e le opinioni dominanti, nell' esagerare le probabilità che son loro favorevoli, e nell' indebolire le probabilità contrarie, sono sorgenti feconde di pericolose illusioni.

I mali presenti e la cagione che li fa nascere, ci affettano molto più, che la rimembranza dei mali prodotti dalla cagione contraria: essi c' impediscono di valutare con esattezza gl' inconvenienti degli uni e degli altri, e la probabilità dei mezzi proprj a preservarcene. Ciò porta alternativamente verso il despotismo e verso l' anarchia i popoli sortiti dallo stato di riposo, nel quale non rientrano giammai se non dietro lunghe e crudeli agitazioni.

Questa impressione viva che noi riceviamo dalla presenza degli avvenimenti, e che ci lascia appena rimarcare gli avvenimenti contrarj osservati da altri, è una cagione principale di errore di cui non sapremo abbastanza guarentircene.

I rapporti di alcuni avvenimenti rimarchevoli, colla predizione degli astrologi, degl' indovini e degli auguri, coi presentimenti e i sogni, coi numeri e i giorni reputati felici, ec., han dato origine ad una folla di pregiudizj tuttora diffusissimi. Non si riflette al gran numero delle non-coincidenze che non han fatto alcuna impressione, o che s' ignorano. Intanto è necessario di conoscerle, per valutare la probabilità delle cagioni cui le coincidenze si attribuiscono. Questa cognizione confermerebbe senza dubbio ciò che la ragione ci detta rispetto ai pregiudizj. Così il filosofo dell' antichità, cui per esaltare la potenza del Dio che si adorava in un tempio, si mostravano nel medesimo gli *ex voto* di tutti

Digitized by Google

ti coloro che dopo averlo invocato, eransi salvati dal naufragio, fece una questione conforme al calcolo delle probabilità, domandando ov' erano iscritti i nomi di coloro che malgrado questa invocazione aveano sofferta la morte. I pregiudizj di cui ho parlato dipendono da cagioni in parte meccaniche che spesso agiscono possentemente sull'immaginazione; ma che si può sempre distruggere coll' esperienza. Che Augusto per esempio, il quale avea la debolezza di non osare di mettersi in cammino l' indomani dei giorni di fiera, ebbe tentato molte volte di vincerla; la comparazione di questi viaggi agli altri, l' avrebbe ben presto guarito da questo timore immaginario.

Ai limiti della fisiologia visibile, comincia un' altra fisiologia i di cui fenomeni, molto più variati che quelli della prima, sono com' essi, assoggettati a leggi generali ch'è importantissimo di conoscere. Questa fisiologia che può chiamarsi *fisiologia intellettuale*, è senza dubbio una continuazione della fisiologia visibile. I nervi i di cui filamenti si perdono nella sostanza midollare del cervello, vi propagano le impressioni ch' essi ricevono dagli oggetti esterni, e vi lasciano delle impressioni permanenti le quali modificano in una maniera occulta l'organo interno, sede del pensiero. I sensi esterni non possono nulla apprendere sulla natura di queste modificazioni sorprendenti per la loro infinita varietà, e per la distinzione e l' ordine che esse conservano nel piccolo spazio che le contiene. Ma applicando alle osservazioni del senso interno che solo può ravvisarle, il metodo di cui si è fatto uso per le osservazioni dei sensi esterni; si potrà portare nella teoria dell' intendimento umano la medesima esattezza che negli altri rami della filosofia naturale.

Già molti principj generali di fisiologia intellettuale sono stati riconosciuti è sviluppati con successo. Tal' è il principio della simpatia, o di quella tendenza di tutti gli esseri similmente organizzati, a mettersi fra loro in armonia. Tal' è ancora il principio del legame di tutte le cose che nell' or-

Digitized by Google

gano interno hanno avuto una esistenza simultanea e regolarmente successiva, legame che col ritorno di una di esse, richiama le altre. A questo principio fecondo si riattacca un gran numero di fenomeni, e il principio seguente che ha un rapporto diretto coll' oggetto di quest' Opera. *Se si effettuano frequentemente gli atti che emergono da una modificazione particolare dell' organo interno; la loro reazione su quest' organo può non solamente accrescere questa modificazione, ma alcune volte darle origine.* Quindi il movimento della mano che tiene una lunga catena, sospesa, si propaga lungo la catena fino alla sua estremità inferiore, e se, allorchè la catena è giunta allo stato di quiete, si mette in movimento questa estremità; la vibrazione rimonta fino alla mano ch' essa fa muovere nell' agitarsi. Questi movimenti reciproci divengono facili e come naturali, per effetto di frequenti ripetizioni. Questa facilità che contrae l'organo interno, è ancora un principio di fisiologia intellettuale.

Gli effetti di questi principj sulla credenza sono rimarchevoli. La credenza, l' adesione che diamo ad una proposizione, è ordinariamente fondata sull' evidenza, sulla testimonianza dei sensi, o su probabilità simili alle testimonianze degli uomini. Il suo grado di forza dipende anch' esso dai dati che ciascun individuo può avere sull' oggetto del suo giudizio.

In virtù della nostra credenza, noi formeremo sempre una serie di atti che la suppongono, senza aver bisogno di richiamarne le prove. La credenza è dunque l' effetto di una modificazione permanente dell' organo interno, modificazione che sussiste indipendentemente da queste pruove alcune volte intieramente obliate, e che ci determina a produrre gli atti che ne sono le conseguenze. Giusta il principio che noi abbiamo esposto, una ripetizione frequente di questi atti può far nascere questa modificazione, e per conseguenza la credenza, sopratutto se questi atti sono ripetuti contemporanea-

Digitized by Google

mente da un gran numero di persone interamente persuase del suo oggetto; imperochè allora alla forza di reazione di questi atti, si accoppia il potere dell'imitazione, conseguenza necessaria del principio della simpatia.

Pascal ha sviluppato bene questi effetti in un articolo dei suo pensieri che ha questo titolo singolare. *Ch' è difficile di dimostrare l' esistenza di Dio coi lumi naturali; ma che la cosa più sicura è di crederla.* Egli così si esprime dirigendosi ad un incredulo. (*)

Vous voulez aller à la foi, et vous n'en savez pas le chemin; vous voulez vous guérir de l' infidélité, et vous en demandez les remédes. Apprenez-les de ceux qui ont été tels que vous, et qui n' ont présentement aucun doute. Ils savent ce chemin que vous voudriez suivre, et ils sont guéris d'un mal dont vous voulez guérir. Suivez la maniére par où ils ont commencé. Imitez leurs actions extérieures, si vous ne pouvez encore entrer dans leurs dispositions intérieures. Quittez ces vains amusemens qui vous occupent tout entier. I' aurais bientôt quitté ces plaisirs, dites-vous, si j' avais la foi.

Tu vuoi andare alla fede e ne ignori la via; vuoi guarire dall'infedeltà e ne chiedi i rimedj. Imparali da coloro che sono stati come te, e che ora non han dubbitazione alcuna. Essi conoscono quella strada che vorresti calcare, e son guariti da un male da cui vuoi tu guarire. Comincia com' essi. Imita le loro azioni esterne se non puoi penetrare ancora nelle loro interne disposizioni. Lascia quei vani diletti che intieramente ti occupano. Gli avrei lasciati, tu dici, se avessi la fede. Ed io ti assicuro che avresti tosto la fede, se lasciato avessi tai diletti. Or spetta a te di cominciare. Io

(*) Ho voluto riportare testualmente il discorso di Pascal, perchè meglia se ne senta la forza (*Il Trad.*).

Digitized by Google

Et moi, je vous dis que vous auriez bientôt la foi, si vous aviez quitté ces plaisirs. Or c' est à vous à commencer. Si je pouvais, je donnerais la foi : je ne le puis, ni par conséquent éprouver la vérité de ce que vous dites ; mais vous pouvez bien quitter ces plaisirs, et éprouver si ce que je dis est vrai.

Il ne faut pas se méconnaître ; nous sommes corps autant qu' esprit, et de là vient que l' instrument par le quel la persuasion se fait, n'est pas la seule démonstration. Combien y a-t-il peu de choses démontrées. Les preuves ne convainquent que l' esprit : la coutume fait nos preuves les plus fortes. Elle incline les sens qui entraînent l' esprit, sans que l' on y pense. Qui a démontré qu' il fera demain jour, et que nous mourrons ? et qui y a-t-il de plus universellement cru ? C' est donc la coutume qui nous persuade. C' est elle qui fait tant de turcs et de payens : c' est elle qui fait les métiers, les soldats, etc. Il est vrai qu' il ne faut pas commencer par elle, pour

ti darei la fede, se il potessi : no 'l posso ; ed in conseguenza neppur posso sentire la verità di ciò che tu dici ; ma puoi lasciare tai diletti, e sperimentare se vèro sia ciò ch' io dico.

Bisogna conoscere bene se stesso ; noi siamo corpo e spirito insieme e da ciò risulta che l'istrumento, mediante cui si effettuisce la persuasione, non è l' unica dimostrazione. Oh quante son poche le cose dimostrate! Le pruove convincon soltanto lo spirito : le più forti ci vengono dall'uso. Questo inclina i sensi che trascinano lo spirito senza pensarvi. Chi mai ha dimostrato che domani farà giorno, o che noi morremo ? intanto qual' altra cosa è più universalmente creduta ? Ce ne persuade l' uso. Questo appunto fa tanti turchi e pagani : questo fa le professioni, i soldati, ec. Egli è vero che non bisogna cominciare da quello per trovare la verità ma bisogna ricorrere a lui quando

Digitized by Google

trouver la vérité (*) ; *mais il faut avoir recours à elle, quand une fois l'esprit a vu où est la vérité ; a fin de nous abreuver et de nous teindre de cette croyance qui nous échappe à toute heure ; car d'en avoir toujours les preuves, c'est trop d'affaire. Il faut acquérir une croyance plus facile, qui est celle de l'habitude qui, sant violence, sans art, sans argument, nous fait croire les choses, et incline toutes nos puissances à cette croyance, en sorte que notre ame y tombe naturellement. Ce n'est pas assez de ne croire que par la force de la conviction, si les sens nous portent à croire le contraire. Il faut donc faire marcher nos deux piéces ensemble ; l'esprit, par les raisons qu'il suffit d'avoir vues une fois en sa vie, et les sens, par la coutume et en leur permettant pas de s'incliner au contraire.*

lo spirito ha veduto una volta la verità ; affin di inaffiarci ed investirci di quella credenza che in ogn' istante ci sfugge ; poichè sarebbe troppo di averne sempre presenti le pruove. Bisogna acquistare una credenza più facile ch' è quella dell' abitudine, la quale senza violenza, senz' arte, senz' argomento fa crederci le cose, e piega tutte le nostre potenze a questa credenza, in guisa che l' anima nostra vi cade naturalmente. Non è gran cosa di non credere se non in forza di convizione, se i sensi ci portano a credere il contrario. Mestieri è dunque di far caminare insieme le due nostre parti ; lo spirito per le ragioni che bastano di aver vedute una volta in vita ; ed i sensi, coll' uso di non permetter loro di piegarsi altrimenti.

(*) Pascal perde qui di veduta ciò che ha raccomandato per acquistar la fede, cioè di cominciare dagli atti esterni.

Digitized by Google

Il mezzo che propone Pascal può essere impiegato con successo per distruggere un pregiudizio ricevuto dall'infanzia e consolidato coll'abitudine. Queste sorte di pregiudizj nascono sovente dalla più debole cagione, nelle immaginazioni attive. Una persona che attaccando al vocabolo *sinistra* una idea di disgrazia, faccia giornalmente colla man dritta una operazione che possa eseguirsi indifferentemente coll'una e coll'altra mano, quest abitudine può accrescere la ripugnanza di servirsi per tale operazione della man sinistra, fino al punto di assegnarne la ragione, impotente contro questo pregiudizio. Egli è natu ale di credere che Augusto dotato di una ragione superiore per tanti riguardi, si ha rimproverato qualche volta la sua debolezza di non ardire di mettersi in cammino l'indomani del giorno di fiera, e che ha voluto superarla. Ma al momento d'intraprendere un viaggio in uno di quei giorni reputati infelici, egli ha potuto dire a se stesso, che *il più sicuro* era di differirla; aumentando in tal modo la sua ripugnanza, coll'abitudine di secondarla. La frequente ripetizione di atti contrarj a siffatti pregiudizj, dee alla lunga indebolirli, e farli del tutto dissipare.

Nel giuoco principalmente si osserva che una folla d'illusioni conserva la speranza e la sostiene contro i colpi disfavorevoli. La maggior parte di coloro che giuocano al lotto, non conoscono quanti colpi sono a loro vantaggio, quanti li sono contrarj. Essi non ravvisano che la possibilità di guadagnare una somma considerevole con una posta leggiera; e i progetti che la loro immaginazione produce, esagerano agli occhi loro la probabilità di ottenerla. Sarebbero essi senza dubbio sorpresi dal numero immenso delle poste perdute, se potessero conoscerle; ma in vece si prende cura di dare ai guadagni una grande pubblicità.

Quando alla lotteria di Francia, un numero non è sortito da lungo tempo, la folla si affretta a coprirlo di poste. Essa giudica che il numero rimasto per lungo tempo senza uscire, lo deve di preferenza agli altri alla prossima estra-

Digitized by Google

zione. Un errore cotanto comune mi sembra derivare dalla illusione per la quale si riporta involontariamente all'origine degli avvenimenti. Per esempio, è pochissimo verisimile che al giuoco di *capo* o *croce* si tirerà *croce* dieci volte di seguito. Questa inverisimiglianza che anche ci sorprende quando *croce* è venuta nove volte, ci porta a credere che al decimo colpo verrà *capo*. Intanto lungi dal farci giudicare in questa guisa; il passato indicando nella moneta una maggiore inclinazione per *croce* che per *capo*, rende il primo di questi avvenimenti più probabile dell' altro: esso come si è visto, aumenta la probabilità di tirar *croce* al colpo seguente. Una illusione di tal fatta persuade a molti che si può sicuramente guadagnare alla lotteria, mettendo in ciascuna volta sopra un istesso numero fino alla sua sortita una posta il di cui prodotto sorpassi la somma di tutte le poste. Ma quando anche simili speculazioni non fossero sovente arrestate dalla impossibilità di sostenerle, esse non diminuiscono il disvantaggio matematico dei speculatori, ed accrescono il loro disvantaggio morale; poichè in ciascuna estrazione esporrebbero una porzione più grande della loro fortuna.

Io ho visto degli uomini ardentemente desiderosi di avere un figlio, sentire con pena le nascite dei bambini nei mesi in cui essi andavano a divenir padri. Immagginandosi che il rapporto di queste nascite a quella delle bambine dovea essere la stessa alla fine di ciascun mese, giudicavano che i bambini già nati rendevano più probabili le nascite prossime delle bambine. Quindi l' estrazione di una palla bianca da un' urna che contiene un numero limitato di palle bianche e nere in un dato rapporto, accresce la probabilità di estrarre una palla nera all' estrazione seguente. Ma ciò cessa di aver luogo, quando il numero delle palle dell' urna è illimitato, come si dee supporre, per assimilare questo caso a quello delle nascite. Se nel corso di un mese fosse nato un numero maggiore di uomini che di donne; potreb-

Digitized by Google

be supporsi che verso il tempo della loro concezione, una causa generale ha favorito le concezioni mascoline; il che renderebbe più probabile la nascita prossima di un bambino. Gli avvenimenti irregolari della natura non sono esattamente comparabili alla sortita dei numeri della lotteria nella quale tutt' i numeri sono mescolati in ciascuna estrazione, in modo da rendere perfettamente eguali i colpi della loro sortita. La frequenza di uno di questi avvenimenti sembra indicare una cagione alquanto durevole che lo favorisce; il che aumenta la probabilità del suo prossimo ritorno; e la sua ripetizione lungamente prolungata, come una lunga serie di giorni piovosi, può sviluppare delle cagioni incognite del suo cangiamento; in guisa che a ciascun avvenimento atteso, noi non siamo portati al medesimo stato d' indecisione su ciò che deve accadere, come lo saremmo in ciascuna estrazione di una lotteria. Ma a misura che si moltiplicano le osservazioni di questi avvenimenti, la comparazione dei loro risultamenti con quei delle lotterie addiviene più esatta.

Per effetto di una illusione contraria alle precedente, si cercano i numeri più frequentemente sortiti nella lotteria di Francia, per formarne delle combinazioni sulle quali si crede situare la sua posta con vantaggio. Ma vista la maniera con cui il miscuglio dei numeri si effettua in questa lotteria, il passato non dee avere influenza veruna sull' avvenire. Le sortite più frequenti di un numero alto non sono che anomalie dell' azzardo; io ne ho sottomessi molti a calcolo, ed ho costantemente trovato che esse eran contenute in limiti che la supposizione di una eguale possibilità di sortita di tutt' i numeri, permette di ammettere senza inverisimiglianza.

In una lunga serie di avvenimenti del medesimo genere, i soli colpi dell' azzardo debbon talora offrire quelle vene singolari di felicità o di mal' essere che la maggior parte de' giuocatori non mancano di attribuire ad una specie di

Digitized by Google

fatalità. Nei giuochi che dipendono nel tempo istesso dall' azzardo e dall' abilità dei giuocatori, spesso accade che chi perde, conturbato dalla sua perdita, cerca di ripararla con colpi azzardosi che eviterebbe essendo in altra situazione: egli aggrava in tal modo la sua propria disgrazia e ne prolunga la durata. Intanto allora divien necessaria la prudenza, ed è importante di convincersi che il disvantaggio morale legato ai colpi disfavorevoli, si accresce colla stessa disgrazia.

Il sentimento in virtù di cui l' uomo si è lungo tempo situato al centro dell' universo, considerandosi come l' oggetto speciale delle cure della natura, porta ciascun individuo a farsi il centro di una sfera più o meno estesa, ed a credere che l' azzardo ha per lui delle preferenze. Sostenuto da questa opinione, i giuocatori espongon sovente delle considerevoli somme a giuochi di cui sanno che le combinazioni son loro contrarie. Nella condotta della vita una opinione di tal fatta talora può avere de' vantaggi; ma il più delle volte essa conduce a delle funeste intraprese. Quì, come in tutto, le illusioni sono pericolose, e la sola verità è generalmente utile.

Uno dei grandi vantaggi del calcolo delle probabilità è d' imparare a dubitare delle prime impressioni. Come si riconosce ch' esse sovente ingannano, allorchè si ponno assoggettare a calcolo; se ne dee conchiudere che sopra altri oggetti, non bisogna abbandonarsi che con una estrema circospezione. Proviamo ciò con alcuni esempj.

Un' urna contiene quattro palle, ma non tutte del medesimo colore. Si è estratta una di queste palle il di cui colore è bianco, e si è rimessa nell' urna per procedere ancora a simili estrazioni. Si domanda la probabilità di non estrarre che palle nere nelle quattro estrazioni susseguenti.

Se le palle bianche e nere fossero in numero eguale, questa probabilità sarebbe la quarta potenza della probabilità $\frac{1}{2}$ di estrarre una palla nera in ciascuna estrazione; essa sa-

Digitized by Google

rebbe dunque un sedicesimo. Ma l' estrazione di una palla bianca al primo tiro, indica una superiorità nel numero delle palle bianche dell' urna; imperochè se si soppongono nell' urna tre palle bianche ed una nera, la probabilità di estrarne una palla bianca è $\frac{3}{4}$; essa è $\frac{2}{4}$, se si suppongono due palle bianche e due nere; finalmente essa si riduce ad $\frac{1}{4}$ se si suppongono tre palle nere ed una bianca. Giusta il principio della probabilità delle cagioni, dedotte dagli avvenimenti, le probabilità di queste tre supposizioni sono tra loro come le quantità $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; sono per conseguenza eguali a $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{6}$. Vi è quindi cinque contro uno a scommettere che il numero delle palle nere è inferiore, o tutt' al più eguale a quello delle bianche. Pare dunque che dopo l' estrazione di una palla bianca al primo tiro, la probabilità di estrarne di seguito quattro palle nere, dev' essere minore che nel caso dell' eguaglianza dei colori, o più piccola di un sedicesimo. Intanto ciò non è, e con un calcolo semplicissimo si trova questa probabilità più grande di un quattordicesimo. In effetti essa sarebbe la quarta potenza di tre quarti, di due quarti e di un quarto, nella prima, seconda e terza delle supposizioni precedenti su i colori delle palle dell' urna. Moltiplicando rispettivamente ciascuna potenza per la probabilità della supposizione corrispondente, o per tre sesti, due sesti ed un sesto; la somma dei prodotti sarà la probabilità di estrarre di seguito quattro palle nere. Si ha quindi per questa probabilità, ventinove trecentottantaquattresimi, frazione maggiore di un quattordicesimo. Questo paradosso si spiega considerando che l' indicazione della superiorità delle palle bianche sulle nere per il primo tiro, non esclude la superiorità delle palle nere sulle bianche, superiorità che esclude la sopposizione dell' eguaglianza de' colori. Or questa superiorità, quantunque poco verisimile, dee rendere la probabilità di tirare di seguito un numero dato di palle nere, più grande che in questa supposizione, se questo numero è considerevole; e si è veduto

Digitized by Google

che ciò comincia allorchè il numero dato è eguale a quattro.

Consideriamo ancora un'urna che contiene molte palle bianche e nere. Supponiamo principalmente che vi sia una palla bianca ed una nera. In allora si può scommettere con eguaglianza, di estrarre una palla bianca in un tiro. Ma se l'urna contiene tre palle due delle quali sieno nere; pare che per l'eguaglianza della scommessa si debbono dare due tiri a prò di colui che scommette di estrarre la palla bianca. Debbono darsene tre, se l'urna contiene tre palle nere ed una bianca, e così del rimanente; in guisa che per compensare col numero dei tiri l'ineguaglianza dei colpi, bisogna accordare tanti tiri quanti colpi contrarj vi sono: si suppone sempre che dopo ciascun tiro, la palla estratta vien rimessa nell'urna. Ma è facile il convincersi che questa prima impressione è erronea. In fatti nel caso di due palle nere sopra una bianca, la probabilità di estrarre dall'urna due palle nere in due tiri, è la seconda potenza di due terzi o di quattro noni; ma questa probabilità aggiunta a quella di avere una palla bianca in due tiri, è la certezza o l'unità; poichè è certo che debbono venire due palle nere, o almeno una palla bianca; la probabilità di quest'ultimo caso è dunque cinque noni, frazione maggiore di una metà. Vi sarebbe maggior vantaggio ancora a scommettere di avere una palla bianca in cinque tiri, quando l'urna contiene cinque palle nere ed una bianca; questa scommessa è anche vantaggiosa in quattro tiri; ed in allora riviene a quella di aver sei in quattro colpi con un sol dado.

Il cavalier de Merè, amico di Pascal, e quello che fece nascere il calcolo delle probabilità, eccitando questo gran geometra ad occuparsene, gli diceva

« *Qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison. Si l'on entreprend de faire six avec un dé, il y a de l'avantage à l'entreprendre en quatre coups, comme de* 671 *à* 625. *Si l'on entreprend de faire sonnés avec de-*

Digitized by Google

ux dés, il y a désavantage à l'entreprendre en 24 coups. Néanmoins 24 est à 36 nombre de faces de deux dés, comme 4 est à 6 nombre des faces d'un dé. Voilà, écrivait Pascal à Fermat, quel était son grand scandale, qui lui faisait dire hautement, que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait..... Il a très-bon esprit; mais il n'est pas géomètre: c'est, comme vous savez, un grand défaut. «

Il cavalier de Meré ingannato da una falsa analogia, pensava che nel caso dell' eguaglianza delle scommesse, il numero dei colpi dee crescere proporzionatamente al numero di tutti gli eventi possibili, ciò che non è esatto, ma che approssimasi tanto più ad esserlo, quanto più grand' è il numero.

Si è tentato di spiegare la superiorità delle nascite dei bambini su quelle delle bambine, pel desiderio generale dei padri, di avere un figlio che perpetui il loro nome. Così immaginando un' urna riempita di una infinità di palle bianche e nere, in numero eguale, e supponendo un gran numero di persone ciascuna delle quali tiri una palla da quest' urna, e continui questo tiro coll' intenzione di arrestarsi quando avrà estratta una palla bianca; si è creduto che questa intenzione dovea rendere il numero delle palle estratte superiore a quello delle palle nere. In effetti, essa dà necessariamente dopo tutti i tiri, un numero di palle bianche almeno eguale a quello delle persone; ed è possibile che questi tiri non diano alcuna palla nera. Ma è facile il riconoscere che ciò è una illusione; imperochè se si suppone che in un primo tiro tutte le persone estrangono nel tempo istesso una palla dall' urna; è evidente che la loro intenzione non può avere alcuna influenza sul colore delle palle che debbono sortire a questa estrazione. Il suo unico effetto sarà di escludere dal secondo tiro le persone che avran tirato una palle bianca al primo. Visibile è parimente che l' intenzione delle persone che prenderanno parte alla nuova

Digitized by Google

estrazione, non influirà sul colore delle palle che sortiranno, e che sarà lo stesso dell' estrazioni seguenti. Questa intenzione non influirà dunque per nulla sul colore delle palle estratte nell' insieme dell' estrazioni: essa farà soltanto partecipare un maggiore od un minor numero di persone a ciascuno dei medesimi. Il rapporto delle palle bianche estratte, alle nere, sarà quindi poco differente dall' unità. Da ciò segue che essendo supposto grandissimo il numero delle persone; se l osservazione dà tra i colori estratti un rapporto che differisce sensibilmente dall' unità; è probabilissimo che la medesima differenza ha luogo press' a poco tra l' unità e il rapporto delle palle bianche alle palle nere contenute nell' urna.

Classifico ancora fra le illusioni, l' applicazione che Leibnitz e Daniele Bernulli han fatto del calcolo delle probabilità, alla sommazione delle serie. Se la frazione di cui il numeratore è l' unità, e 'l denominatore è l' unità più una variabile, si riduce in una serie ordinata per rapporto alle potenze di questa variabile; è facile vedere che supponendo la variabile eguale all' unità, la frazione diviene una metà, e la serie diviene, *più uno*, *meno uno*, *più uno*, *meno uno*, *ec.* Aggiungendo i due primi termini, i due seguenti, e così del rimanente, la serie si trasforma in un' altra di cui ciascun termine è zero. Grandi (*) ne avea dedotto la possibilità della creazione; perchè la serie essendo sempre eguale ad una metà, vedeva nascere questa frazione da una infinità di zeri, o dal nulla. In tal modo Leibnitz credè vedere l'immagine della creazione nella sua Aritmetica binaria nella quale egli non impiegava che i due caratteri zero e l' unità. Immaginò egli che l' unità potea rappresentare Iddio; e zero, il nulla; e che l'Essere Supremo avea tirato dal niente tutti gli esseri, come l' unità col zero esprime tutt' i numeri in questo sistema di aritmetica.

(*) Gesuita italiano.

Digitized by Google

Questa idea piacque talmente a Leibnitz che la partecipò al gesuita Grimaldi, presidente del tribunale delle matematiche nella China, sperando che questo emblema della creazione convertirebbe al cristianesmo l' imperadore di allora il quale amava particolarmente le scienze. Rapporto questo tratto, per mostrare fino a qual punto i pregiudizi dell' infanzia possono indurre in errore gli uomini i più grandi.

Leibnitz condotto sempre da una metafisica singolare e delicatissima, considerò che la serie, *più uno*, *meno uno*, *più uno*, ec., diviene l' unità o zero, secondochè si ferma ad un numero di termini pari o impari; e come nell' infinito non vi è ragione alcuna di preferire il numero pari all'impari; seguendo le regole della probabilità, si dee prendere la metà del risultamento relativo a queste due specie di numeri, e che sono zero e l' unità; il che dà una metà per il valore della serie. Daniele Bernulli ha esteso di poi questo ragionamento alla sommazione delle serie formate dai termini periodici. Ma propriamente parlando, tutte queste serie non hanno valori: esse non ne prendono se non nel caso in cui i loro termini sono moltiplicati per le potenze successive di una variabile minore dell' unità. In allora queste serie sono sempre convergenti, piccola che si supponga la differenza della variabile all' unità; ed è facile il dimostrare che i valori assegnati da Bernulli, in virtù della regola delle probabilità, sono i valori medesimi delle frazioni generatrici delle serie, quando si suppone in queste frazioni la variabile eguale all' unità. Questi valori sono ancora i limiti le di cui serie si approssimano semprepiù, a misura che la variabile si approssima all' unità. Ma quando la variabile è esattamente eguale all' unità, le serie cessano di essere convergenti: esse non hanno altro valore se non quello di quando si sospendono. Il rapporto rimarchevole di quest' applicazione del Calcolo delle probabilità, coi limiti dei valori delle serie periodiche, suppone che i termi-

Digitized by Google

ni di queste serie sono moltiplicati per tutte le potenze consecutive della variabile. Ma queste serie possono risultare dallo sviluppo di una infinità di frazioni differenti, nelle quali ciò non ha luogo. Quindi la serie *più uno*, *meno uno*, *più uno*, *ec.*, può nascere dallo sviluppo di una frazione il di cui numeratore è l'unità più la variabile, e 'l denominatore è questo numeratore aumentato del quadrato della variabile. Supponendo la variabile eguale all'unità, questo sviluppo si cambia nella serie proposta, e la frazione generatrice addiviene eguale a due terzi; le regole delle probabilità darebbero dunque allora un falso risultamento; il che prova quanto sarebbe pericoloso d'impiegare simili ragionamenti, soprattutto nelle scienze matematiche che il rigore del loro cammino dee eminentemente distinguere.

Una illusione nocevole ai progressi delle scienze fisiche è quella che porta a credere che l'esattezza nelle osservazioni dei fenomeni sensibilissimamente turbati da cagioni accidentali ed irregolari, è inutile e non accresce la probabilità dei loro risultamenti. Il calcolo conferma ciò che il semplice buon senso fa presentire, cioè che vi sono sempre molti vantaggi a non lasciar sussistere se non le cagioni inevitabili di errore.

CAP. XII.

Dei diversi mezzi di approssimarsi alla certezza.

L'induzione, l'analogia, ipotesi fondate su i fatti e rettificate incessantemente da nuove osservazioni, un tatto felice dato dalla natura e fortificato da numerose comparazioni delle sue indicazioni coll'esperienza: tali sono i mezzi principali di pervenire alla verità.

Se si considera attentamente la serie degli oggetti dell'istessa natura; si scorgon tra essi e nei loro cangiamenti alcuni rapporti che si manifestano sempre più a misura che

Digitized by Google

la serie si prolunga, e che estendendosi e generalizzandosi incessantemente, conducono finalmente al principio da cui dipendono. Ma questi rapporti sono spesso inviluppati in tante circostanze estranee, che vi bisogna una gran sagacità per distrigarle, e per rimontare a questo principio: in ciò consiste il vero genio delle scienze. L'analisi e la filosofia naturale sono debitrici delle loro più importanti scoperte a questo mezzo fecondo che si chiama *induzione*. Newton deve a questo metodo il suo teorema del binomio, e 'l principio della gravitazione universale. La probabilità dei suoi risultamenti è difficile a valutarsi. Essa si fonda su ciò che i rapporti i più semplici, sono i più comuni: il che si verifica nelle formule dell' analisi, e si trova nei fenomeni naturali, nella cristallizzazione, e nelle combinazioni chimiche. Questa semplicità di rapporti non sembrerà sorprendente, se si considera che tutti gli effetti della natura altro non sono se non che risultamenti matematici di un picciol numero di leggi immutabili.

L' induzione intanto, facendo scoprire i principj generali delle scienze, non basta per istabilirli a rigore. Fa d' uopo confermarli con delle dimostrazioni, o con dell' esperienze decisive; imperochè la storia delle scienze ci mostra che l' induzione ha qualche volta condotto a de' risultamenti inesatti. Citerò per esempio un teorema di Fermat su i numeri primi. Questo gran geometra che avea profondamente meditato sulla loro teoria, cercava una formula la quale non contenendo se non numeri primi, dasse direttamente un numero primo maggiore di qualunque numero assegnabile. L induzione lo condusse a pensare che due inalzato ad una potenza che fosse anch' essa una potenza di due, formava coll' unità un numero primo. Così due inalzato a quadrato, più uno, forma il numero primo cinque: due inalzato alla seconda potenza di due, o sedici, forma con uno il numero primo diecisette. Trovò egli che ciò era ancor vero per l' ottava e sedicesima potenza di due; e questa induzione sosten-

Digitized by Google

nuta da molte considerazioni aritmetiche, gli fece riguardare questo risultamento come generale. Confessa egli intanto di non averlo dimostrato. In effetti, Eulero ha riconosciuto che ciò cessa di aver luogo per la trentaduesima potenza di due, che aumentata dell'unità, dà 4294967297, numero divisibile per 641.

Noi giudichiamo per induzione, che se avvenimenti diversi, movimenti per cagion d'esempio, sembran costantemente e da lungo tempo legati da un semplice rapporto; continueranno incessantemente ad esservi assoggettati; e colla teoria delle probabilità ne dedurremo che questo rapporto è dovuto non all'azzardo, ma ad una cagione regolare. Quindi l'eguaglianza dei movimenti di rotazione e di rivoluzione della luna, quella dei movimenti dei nodi dell'orbita e dell'equatore lunare, e la coincidenza di questi nodi; il rapporto singolare dei movimenti dei tre primi satelliti di Giove, secondo cui la longitudine media del primo satellite, meno tre volte quella del secondo, più due volte quella del terzo, è eguale a due angoli retti; l'eguaglianza del ritorno medio delle maree, a quella del passaggio della luna al meridiano; tutte queste cose che si mantengono da che si osservano, indicano con una estrema verisimiglianza, l'esistenza di cagioni costanti che i geometri sono felicemente pervenuti a riattaccare alla legge della gravitazione universale, e la di cui conoscenza rende certa la perpetuità di questi rapporti.

Il cancelliere Bacone, promotore sì eloquente del vero metodo filosofico, ha fatto dell'induzione un abuso stranissimo per provare l'immobilità della terra. Ecco com'egli ragione nel *Novum Organum*, la sua più bell'opera. Il movimento degli astri dall'oriente all'occidente, è tanto più pronto, quanto più lontani sono questi astri dalla terra. Questo movimento è il più rapido per le stelle: si rallenta alquanto per Saturno, un poco più per Giove, e così di seguito fino alla luna ed alle comete le meno elevate. Que-

Digitized by Google

sto movimento è anche percettibile nell' atmosfera, soprattutto fra i tropici, a motivo dei grandi circoli che le molecole dell' aria vi descrivono; finalmente è quasi insensibile per l' Oceano; esso è dunque nulla per la terra. Ma questa induzione prova solamente che Saturno e gli astri che gli sono inferiori hanno de' movimenti proprj contrarj al movimento reale o apparente che trasporta tutta la sfera celeste dall' oriente all' occidente, e che questi movimenti sembrano più lenti per gli astri più lontani; il che è conforme alle leggi dell' ottica. Bacone avrebbe dovuto essere sorpreso dalla velocità inconcepibile che bisogna supporre agli astri, per compiere la loro rivoluzione diurna nell' ipotesi della immobilità della terra, e dell' estrema semplicità con cui la sua rotazione spiega in che modo corpi così distanti gli uni dagli altri, come le stelle, il sole, i pianeti e la luna, sembran tutti assoggettati a queste rivoluzione. In quanto all' Oceano ed all' atmosfera, non dovrebbe assimilarsi il loro movimento a quello degli astri, che sono distaccati dalla terra: in vece che l' aria e il mare facendo parte del globo terrestre, dovrebbero partecipare del suo movimento o del suo riposo. Portato Bacone alle più grandi vedute in forza del suo genio, è singolare che non sia stato trascinato dall' idea maestosa che il sistema di Copernico offre dell' universo. Potea egli intanto trovare in favor di questo sistema, delle forti analogie nelle scoperte di Galileo che gli eran cognite. Per la ricerca della verità egli ha dato il precetto, non l' esempio. Ma insistendo con tutta la forza della ragione e dell' eloquenza sulla necessità di abbandonare le sottigliezze insignificanti della scuola, per abbandonarsi alle osservazioni ed all' esperienze, ed indicando il vero metodo di sollevarsi alle cagioni generali dei fenomeni; questo gran filosofo ha contribuito agl' immensi progressi che lo spirito umano ha fatte nel bel secolo in cui egli ha terminato la sua carriera.

L' analogia è fondata sulla probabilità che le cose simili hanno cagioni del medesimo genere, e producono i medesi-

Digitized by Google

mi effetti. Più la similitudine è perfetta, più grand'è questa probabilità. Quindi noi giudichiamo senz' alcun dubbio ch'esseri provveduti degl' istessi organi, eseguendo le medesime cose, e comunicando insieme, provano le medesime sensazioni, e son mossi dagl'istessi desiderj. La probabilità che gli animali che si avvicinano a noi per i loro organi, hanno delle sensazioni analoghe alle nostre, quantunque alquanto inferiore a quella ch' è relativa agl' individui della nostra specie, è ancora eccessivamente grande; e vi è bisognato tutta l' influenza dei pregiudizj religiosi per far pensare ad alcuni filosofi, che gli animali sono puri automi. La probabilità dell' esistenza del sentimento decresce a misura che la similitudine degli organi co' nostri diminuisce; ma è d' essa sempre fortissima, anche per gl'insetti. Nel veder quelli di un' istessa specie eseguire delle cose complicatissime, esattamente dell' istessa maniera, di generazioni in generazioni, e senz' averle apprese; si è portato a credere che essi agiscono per una specie di affinità, analoga a quella che ravvicina le molecole dei cristalli, ma che mescolandosi al sentimento legato ad ogni organizzazione animale, produce colla regolarità delle combinazioni chimiche, delle combinazioni molto più singolari: questo miscuglio delle affinità elettive e del sentimento, potrebbesi forse denominare *affinità animale*. Quantunque esista molt' analogia tra l' organizzazione delle piante e quella degli animali, non mi sembra intanto sufficiente per estendere ai vegetabili la facoltà di sentire; come niente autorizza a rifiutarcela.

Il sole coll' azione benefica della sua luce e del suo calorico vivificando gli animali e i vegetabili che cuoprono la terra; noi giudichiamo coll' analogia, ch' esso produce effetti somiglianti su gli altri pianeti; imperochè non è naturale il pensare che la materia di cui vediamo sviluppare l' attività in tanta guise, sia sterile in un pianeta grosso come Giove, che a somiglianza del globo terrestre ha i suoi giorni, le sue notti, i suoi anni, e sul quale le osservazioni indicano de'

Digitized by Google

cangiamenti che suppongono delle forze attivissime. Intanto sarebbe lo stesso che dare molta estensione all' analogia, volendosene conchiudere la similitudine degli abitanti dei pianeti e della terra. L' uomo fatto per la temperatura di cui gode, e per l' elemento che respira, secondo tutte le apparenze non potrebbe vivere su gli altri pianeti. Ma non vi dev' essere una infinità di organizzazioni relative alle differenti costituzioni dei globi di quest' universo? Se la sola differenza degli elementi e dei climi costituisce tanta varietà nelle produzioni terrestri, quanto più debbono differir quelle dei diversi pianeti e dei loro satelliti? L' immaginazione la più attiva non può formarsene alcuna idea; ma la loro esistenza è verisimilissima.

Noi siam condotti da una forte analogia a riguardare le stelle come altrettanti soli dotati al par del nostro di una forza attrattiva proporzionale alla massa e reciproca al quadrato delle distanze. Imperochè questa forza essendo dimostrata per tutt' i corpi del sistema solare e per le loro più piccole molecole; sembra appartenere a tutta la materia. Già i movimenti delle piccole stelle che si son chiamate *doppie* a causa del loro ravvicinamento, sembrano indicarlo: un secolo al più di osservazioni precise, contestando i loro movimenti di rivoluzione gli uni intorno agli altri, metterà fuori dubbio le loro attrazioni reciproche.

L' analogia che ci porta a fare di ciascuna stella il centro di un sistema planetario, è molto men forte della precedente; ma essa acquista della verisimiglianza per l' ipotesi che noi abbiam proposto sulla formazione delle stelle e del sole; imperochè in questa ipotesi ciascuna stella essendo stata a somiglianza del sole primitivamente circondata da una vasta atmosfera, è naturale di attribuire a quest' atmosfera i medesimi effetti che all' atmosfera solare, e di supporre ch' essa nel condensarsi ha prodotto pianeti e satelliti.

Il metodo il più sicuro che possa guidarci nella ricerca della verità, consiste a sollevarsi colla via dell' induzione dai

Digitized by Google

fenomeni particolari a de' rapporti sempre più estesi, fino che si arriva finalmente alla legge da cui essi derivano. In seguito si verifica questa legge, sia coll' esperienze dirette, quando ciò è possibile, sia esaminando se essa soddisfa ai fenomeni conosciuti; e se con un' analisi rigorosa si veggon tutti derivare da questa legge, fin nei loro più minuti dettagli; se d' altronde essi sono variatissimi, e assai numerosi, la scienza in allora acquista il più alto grado di certezza e di perfezione che mai attender si potesse. Tal' è divenuta l' astronomia colla scoperta della gravitazione universale. La storia delle scienze fa vedere che questa marcia lenta e penosa dell' induzione, non è stata sempre quella degl' inventori. L' immaginazione impaziente di rimontare alle cagioni, si compiace di creare delle ipotesi: e spesso snatura i fatti per piegarli all' opera sua: in allora le ipotesi sono pericolose. Ma quando si ravvisano come mezzi di legare tra loro i fenomeni, per iscuoprirne le leggi; allorchè evitando di attribuir loro della realtà, si rettificano incessantemente con nuove osservazioni; queste ipotesi possono condurre alle vere cause, o metterci almeno alla portata di dedurre dai fenomeni osservati, quelli che date circostanze debbono far risorgere.

Se si provassero tutte le ipotesi che si possono formare sulla cagione dei fenomeni; si perverrebbe colla via dell'esclusione, alla vera. Questo mezzo è stato impiegato con successo: delle volte si è giunto a molte ipotesi che spiegano egualmente bene tutt' i fatti conosciuti, e tra i quali i dotti si sono divisi, finchè osservazioni decisive abbian fatto conoscere la vera. In allora è interessante per la storia dello spirito umano di rivenire su queste ipotesi, di vedere com'esse pervengono a spiegare un gran numero di fatti, e di ricercare i cangiamenti che debbon subire per rientrare in quella della natura. Quindi il sistema di Tolomeo, ch' è la realizzazione delle apparenze celesti; si trasforma nella ipotesi del movimento dei pianeti intorno al sole, ren-

Digitized by Google

dondovi eguali e paralleli all' orbita solare i circoli e gli epicili che Tolomeo fa descrivere annualmente e di cui rimane indeterminata la grandezza. Per cangiare queste ipotesi nel vero sistema del mondo, basta in seguito di trasportare alla terra in senso contrario, il movimento apparente del sole.

La probabilità dei risultamenti ottenuti con questi diversi mezzi, è quasi sempre impossibile di esser sottomessa a calcolo; ciò ha luogo parimenti per i fatti storici. Ma l' insieme dei fenomeni spiegati o delle testimonianze, è talelle volte, che senza poter valutarne la probabilità, non può ragionevolmente permettersi alcun dubbio a loro riguardo. Negli altri casi è cosa prudente di ammettele con molta riserba.

CAP. XIII.

Notizia storica sul calcolo delle probabilità.

Da molto tempo si sono determinati nei giuochi i più semplici, i rapporti dei colpi favorevoli o contrarj ai giuocatori: le poste e le scommesse eran regolate dietro questi rapporti. Ma niuno prima di Pascal e Fermat avea dato dei principj e dei metodi per sottomettere quest' oggetto a calcolo, nè aveva risoluto questioni di questo genere, alquanto complicate. A questi due grandi geometri bisogna dunque rapportare i primi elementi della scienza delle probabilità, la di cui scoperta può esser classificata fra le cose rimarchevoli che hanno illustrato il secolo decimosettimo, quello che fra tutti gli altri fa più onore allo spirito umano. Il problema principale che essi risolverono per vie diverse, consiste, come si è veduto precedentemente, nel dividere con equità la posta tra giuocatori le di cui abilità sieno eguali, e che convengono di lasciare una partita, prima che fosse finita; la condizione della partita essendo, che per guadagnarla, bisogna giungere il primo ad un dato

Digitized by Google

numero di punti. Si vede chiaro che la divisione dee farsi proporzionatamente alle probabilità rispettive dei giuocatori, di guadagnare questa partita; probabilità dipendenti dal numero dei punti che lor mancano ancora. Il metodo di Pascal è ingegnosissimo, e non è in sostanza se non l'equazione alle differenze parziali, di questo problema, applicata a determinare le probabilità successive dei giuocatori, progredendo dai numeri più piccoli ai seguenti. Questo metodo è limitato al caso dei due giuocatori: quello di Fermat, fondato sulle combinazioni, si estende ad un numero qualunque di giuocatori. Pascal credè sul principio che esso dovea essere, come il suo, ristretto a due giuocatori; il che stabilì fra di loro una discussione in fine della quale Pascal riconobbe la generalità del metodo di Fermat.

Huygheus riunì i diversi problemi che si avevano di già risoluti, e ne aggiunse dei nuovi in un piccolo Trattato, il primo che sia comparso in questa materia, e che ha per titolo, *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Molti geometri se ne occuparono in seguito: Huddes e il gran pensionario Witt in Olanda, e Halley in Inghilterra, applicarono il calcolo alle probabilità della vita umana; e Halley pubblicò per quest'oggetto, la prima tavola di mortalità. Quasi nel tempo stesso Giacomo Bernulli propose ai geometri, diversi problemi di probabilità dei quali diede in seguito le soluzioni. Finalmente compose la sua bell'opera intitolata *Ars conjectandi* la quale comparve sette anni dopo la sua morte avvenuta nel 1706. La scienza delle probabilità è molto più approfondita in quest'opera che in quella di Huygheus: l'autore dà ivi una teoria generale delle combinazioni e delle serie, e l'applica a molte questioni difficili, concernenti l'azzardo. Quest'opera è rimarchevole ancora per l'esattezza e finezza delle vedute, per l'impiego della formula del binomio in questo genere di questioni, e per la dimostrazione di questo teorema, cioè che moltiplicando indefinitivamente le osservazioni e l'esperienze; il rapporto de-

Digitized by Google

gli avvenimenti di nature diverse, si approssima a quello delle loro possibilità rispettive, in limiti il di cui intervallo si restringe semprepiù, a misura ch' essi si moltiplicano, e divengono minori di qualunque grandezza assegnabile. Questo teoréma è utilissimo per conoscere colle osservazioni, le leggi e le cagioni dei fenomeni. Bernulli attaccava con ragione una grande importanza alla sua dimostrazione ch' egli dice di aver meditato pel corso di venti anni.

Nell' intervallo dalla morte di Giacomo Bernulli alle pubblicazione della sua opera; Montmort e Moivre fecero comparire due trattati sul calcolo delle probabilità. Quello di Montmort ha per titolo, *Essai sur les Jeux de hasard*: questo saggio contiene numerose applicazioni di questo calcolo, ai diversi giuochi. Nella seconda edizione, l' autore vi ha annesso alcune lettere nelle quali Nicola Bernulli dà delle soluzioni ingegnose di molti problemi difficili. Il trattato di Moivre, posteriore a quello di Montmort, comparve prima nelle *Transactions Philosophiques* dell' anno 1711; in seguito l' autore lo pubblicò separatamente, e lo ha perfezionato successivamente in tre edizioni che ne ha dato. Quest' opera è principalmente fondata sulla formula del binomio; e i problemi che contiene, non che le loro soluzioni, hanno una grande generalità. Ma ciò che la distingue, è la teoria delle serie ricorrenti, ed il loro uso in queste materie. Questa teoria è l' integrazione dell' equazioni lineati alle differenze finite a coeficienti costanti, integrazione alla quale Moivre perviene in un modo felicissimo.

Moivre ha ripreso nella sua opera la teoria di Giacomo Bernulli sulla probabilità dei risultamenti determinati da un gran numero di osservazioni. Egli non si contenta di far vedere, come Bernulli, che il rapporto degli avvenimenti che debbono accadere, si approssima incessantemente a quello delle loro possibilità rispettive; dà di più una espressione elegante e semplice della probabilità che la differenza di questi due rapporti è contenuta in dati limiti. Per ciò egli de-

Digitized by Google

termina il rapporto del più gran termine dello sviluppo di una potenza elevatissima del binomio, alla somma di tutt'i suoi termini; e il logaritmo iperbolico dell' eccesso di questo termine, su i termini che sono vicinissimi. Il più gran termine essendo allora il prodotto di un numero considerevole di fattori; il suo calcolo numerico diviene impraticabile. Per ottenerlo con un' approssimazione convergente, Moivre fa uso di un teorema di Stirling sul termine medio del binomio inalzato ad un' alta potenza, teorema rimarchevole, soprattutto in quantochè introduce la radice quadrata del rapporto della circonferenza al raggio, in una espressione che sembra dover essere estranea a questa trascendente. Quindi Moivre fu singolarmente colpito da questo risultamento che Stirling avea dedotto dall' espressione della circoferenza in prodotti infiniti, espressione, alla quale Wallis era pervenuto con un' analisi singolare, che contiene il germe della teoria sì curiosa e sì utile delle integrali definite.

Molti letterati fra i quali debbonsi distingnere Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Duprè de Saint-Maure, Simpson, Sussmilch, Messene, Moheau, Price e Duvillard, han riunito un gran numero di dati preziosi sulla popolazione, le nascite, i matrimonj e le mortalità. Essi han dato delle formule e delle tavole relative alle rendite vitalizie, alle tontine, alle assicurazioni, ec. Ma in questa corta notizia io non posso far altro che indicare semplicemente questi travagli utili, per attaccarmi alle idee originali. Di questo numero è la distinzione delle speranze matematica e morale, e il principio ingegnoso che Daniele Bernulli ha dato per sottomettere a calcolo quest' ultima. Tal' è ancora la felice, applicazione che egli ha fatto del calcolo delle probabilità, alla inoculazione. Nel numero di queste idee originali si dee sopra d' ogn' altro situare la considerazione diretta delle possibilità degli avvenimenti osservati. Giacomo Bernulli e Moivre supponevano queste possibilità, cognite; e cercavano la probabilità che il risultamento delle esperienze a fa-

Digitized by Google

re, si approssimerà sempre più a rappresentarle. Bayes, nelle *Transactions Philosophiques* dell'anno 1763, ha cercato direttamente la probabilità che le possibilità indicate da esperienze di già fatte, sono comprese in dati limiti; e vi è pervenuto in una maniera fina ed ingegnosissima, quantunque alquanto confusa. Quest'oggetto si riattacca alla teoria della probabilità delle cagioni e degli avvenimenti futuri, dedotta dagli avvenimenti osservati; teoria di cui alcuni anni dopo io esposi i principj coll'osservazione dell'influenza delle ineguaglianze che possono esistere tra avvenimenti che suppongonsi eguali. Quantunque s'ignori quali sieno gli avvenimenti semplici che queste ineguaglianze favoriscono; pure questa stessa ignoranza accresce sovente la probabilità degli avvenimenti composti.

Nel generalizzare l'analisi e i problemi concernenti le probabilità, fui condotto al calcolo delle differenze finite parziali che Lagrange ha trattato in seguito con un metodo semplicissimo, e di cui egli ha fatte eleganti applicazioni a questo genere di problemi. La teoria delle funzioni generatrici, che io diedi quasi nel tempo istesso, fra gli oggetti che abbraccia, comprende questi oggetti, e si adatta di per se stessa e colla più grande generalità alle più difficili questioni di probabilità. Con delle approssimazioni convergentissime essa determina ancora i valori delle funzioni composte da un gran numero di termini e di fattori; e facendo vedere che la radice quadrata del rapporto della circonferenza al raggio entra il più delle volte in questi valori, mostra che può introdurvisi una infinità di altre trascendenti.

Si è sotto messo anche al calcolo, la probabilità delle testimonianze, i voti e le decisioni delle assemblee elettorali e deliberanti; e i giudizj de' tribunali. Tante passioni, interessi e circostanze complicano le quistioni relative a questi oggetti, che le medesime sono quasi sempre insolubili. Ma la soluzione dei problemi più semplici e che hanno con esse molte analogia, possono sovente spandere grandi lumi su

Digitized by Google

queste questioni difficili ed importanti, lumi che la sicurezza del calcolo rende sempre preferibili ai ragionamenti i più speciosi.

Una delle più interessanti applicazioni del calcolo delle probabilità, concerne i medj che bisogna scegliere fra i risultamenti delle osservazioni. Molti geometri se ne sono occupati; e Lagrange nelle Memorie di Turino ha pubblicato un bel metodo per determinare questi medj, quando la legge degli errori delle osservazioni è conosciuta. Pel medesimo oggetto io ho dato un metodo fondato sopra un artificio singolare che può essere impiegato con vantaggio in altre questioni di analisi, e che permettendo di estendere indefinitivamente in tutto il corso di un lungo calcolo funzioni che debbono esser limitate dalla natura del problema, indica le modificazioni che ciascun termine del risultamento finale ricever dee in virtù di queste limitazioni. Ma questi metodi suppongono nota la legge degli errori delle osservazioni, il che non è. Felicemente, io ho trovato che se le osservazioni sono in gran numero, la ricerca dei medj che debbonsi scegliere, addiviene indipendente da questa legge. Si è visto di sopra che ciascuna osservazione fornisce un'equazione di condizione, del primo grado, che può esser sempre disposta in guisa che tutt' i suoi termini sieno nel primo membro, essendo zero il secondo. L'uso di queste equazioni è una delle cagioni principali della gran precisione delle nostre tavole astronomiche; perchè alla fissazione dei loro elementi si è potuto far concorrere un numero immenso di eccellenti osservazioni. Quando l' elemento a determinare è uo solo, Cotes avea prescritto di preparare l' equazioni di condizione, di sorta che il coeficiente dell'elemento incognito fosse positivo in ciascuna di esse, e di aggiungere in seguito tutte queste equazioni, per formare un equazione finale d' onde deducesi il valore di questo elemento. La regola di Cotes fu seguita da tutt' i calcolatori. Ma quando bisognava determinare molti elementi; non si

Digitized by Google

aveva alcuna regola fissa per combinare l' equazioni di condizione, in maniera da ottenere l' equazioni finali necessarie: solamente si sceglievano per ciascun elemento le osservazioni le più proprie a determinarlo. Per ovviare siffatti tastamenti, Legendre e Gauss immaginarono di aggiungere i quadrati dei primi membri dell' equazioni di condizione, e di renderne la somma un *minimum*, facendovi variare ciascun elemento incognito: con questo mezzo si ottengono direttamente tante equazioni finali, quanti elementi vi sono. Ma i valori determinati da queste equazioni, meritan' esse la preferenza su tutte quelle che si possono ottenere con altri mezzi? Ecco ciò che soltanto il calcolo delle probabilità potea insegnare. Io l' applicai dunque a quest' importante oggetto, e con un' analisi delicata pervenni ad una regola che contiene la precedente, e che al vantaggio di dare con un metodo regolare gli elementi cercati, unisce quello di farli sortire colla massima evidenza dall' insieme delle osservazioni, e di determinarne i valori i quali non lasciano a temere che i più piccioli errori possibili.

Intanto si ha ancora una conoscenza imperfetta dei risultamenti ottenuti, finchè la legge degli errori di cui tali risultamenti sono suscettibili non è conosciuta: bisogna poter assegnare la probabilità che questi errori sono contenuti in dati limiti; il che riviene a determinare ciò che io ho chiamato *peso* del risultamento. L' analisi di cui ho parlato conduce a delle formule generali e semplici per quest' oggetto.

Queste formule sono di una grande utilità nelle scienze naturali e morali. Le cagioni regolari dei fenomeni sono il più delle volte o incognite, o troppo complicate per essere sottomesse a calcolo: spesso ancora la loro azione vien turbata da cagioni accidentali ed irregolari; ma essa rimane sempre impressa negli avvenimenti prodotti da tutte queste cagioni, e vi apporta delle modificazioni che una lunga serie di osservazioni può determinare. L' analisi delle probabilità sviluppa queste modificazioni, assegna i loro grandi di

Digitized by Google

verisimiglianza, ed indica fino a qual punto bisogna moltiplicare le osservazioni, acciò non resti a loro riguardo alcun dubbio ragionevole. Quindi fra le cagioni irregolari che agitano l'atmosfera, i cangiamenti periodici del calorico solare dal giorno alla notte, e dall'inverno all'està, producono delle oscillazioni diurne ed annuali nella pressione di questa gran massa fluida, e nell'altezza corrispondente del barometro, oscillazioni che numerose osservazioni barometriche han fatto conoscere con una probabilità almeno equale a quella dei fatti che riguardiamo come certi. In tal guisa ancora la serie degli avvenimenti storici ci mostra l'azione costante dei grandi principj della morale, fra le passioni e gl'interessi diversi che agitano in tutt'i sensi le società.

E' osservabile che una scienza nata per considerare i giuochi, sia pervenuta al punto degli oggetti i più interessansi delle umane conoscenze.

Io ho riunito tutti questi metodi nella mia *Théorie analytique des Probabilités*, ove mi son proposto di esporre nel modo il più generale i principj e l'analisi del calcolo delle probabilità, non che le soluzioni dei problemi i più interessanti e i più difficili che il calcolo presenta.

Digitized by Google

NOTIZIA BIOGRAFICA

SUL

CONTE LAPLACE

Il conte PIETRO SIMONE LAPLACE nacque il 23 marzo 1749, a Beaumont-en-Auge.

Il suo genitore era un contadino.

Professò egli per qualche tempo le matematiche nella scuola militare stabilita in quel borgo, e andò quindi in Parigi ove trovò de' protettori utili, che come valente cortigiano non men che dotto geometra, ebbe l'arte di coltivare con successo.

La prima opera che egli pubblicò fu stampata a spese di SARON, il quale volea con ciò incoraggiare un merito nascente, sprovveduto affatto di beni di fortuna.

Per le sue cognizioni nell'analisi e nella geometria trascendentale, LAPLACE non tardò a stabilirsi una riputazione estesissima. Rimpiazzò egli BEZOUT nelle funzioni di esaminatore del corpo reale di artiglieria; e divenne successivamente membro dell'Accademia delle Scienze, dell'Istituto, e del *Bureau* delle longitudini.

Nel 1799 LAPLACE fece omaggio al Consiglio de' Cinquecento, della sua opera intitolata: *Exposition du système du monde.*

Digitized by Google

Il 29 settembre dell' anno medesimo, alla testa di una deputazione, LAPLACE presentò al sudetto Consiglio il conto annuale dei travagli dell'Istituto; e ricordando nel suo discorso i nomi degli uomini celebri che aveano illustrato la Francia col loro sapere, rese un omaggio affettuoso alla memoria del suo benefattore, il presidente SARON.

Dopo il 18 brumale, LAPLACE fu nominato dai consoli, ministro dell' interno, ma essendo stato quasi immediatamente rimpiazzato da LUCIANO BONAPARTE, entrò nel senato in virtù di un decreto del mese di dicembre 1799; ne divenne vice-presidente in luglio 1803, e cancelliere nel mese di settembre seguente. Il 12 fruttidoro anno 13, fece un rapporto al senato, sulla necessità di ristabilire il calendario gregoriano e di abolir quello della Repubblica.

Durante il corso del regime imperiale, LAPLACE è stato un perfetto modello di tutte le qualità indispensabili ad un cortigiano; si trovava la mattina in tutte le anticamere, la sera in tutt' i saloni. Tanto lui quanto la contessa sua moglie, ch' era dama di onore della PRINCIPESSA ELISA, sorella maggiore dell' imperadore, passavano per i personaggi della corte imperiale i di cui cavalli aveau la maggiore occupazione. Coppia giammai vi fu che portato avesse al più alto punto l'arte di riprodursi. Era la cosa più facile incontrarli un istessa serata alle *Tuileries*, presso i grandi dignitarj, presso i ministri. Dotati di maniere eleganti e cortesi, il riguardo, il sorriso, l'accoglimento che riscuotevano era da pertutto lo stesso. Il governo reale ha trovato in essi tutte le abitudini dell'impero. Fedeli per istinto a tutt' i governi, il ritorno dei Borboni non ha cangiato in essi che la direzione delle loro visite. Sarebbe nondimeno ingiusto di non riconoscere che in un picciol numero di circostanze, il CONTE LAPLACE si è fatto rimarcare con alcune opinioni liberali, che a dir vero non si aspettavano da lui; e quantunque in verità ciò non sia stato se non quando egli si è creduto fortemente sostenuto del ministero, il dovere c' imponeva di tenergliene conto.

Digitized by Google

Se dall'uom di stato senza carattere e dal cortigiano noi rivolgiam lo sguardo sul letterato distinto, confesseremo volentieri che dopo la morte di LAGRANGE, IL CONTE LAPLACE occupa il primo posto fra i geometri francesi. Il suo libro della *Méçanique céleste* in cui brilla in ciascuna pagina il genio dell'analisi, offre da per tutto delle teorie che gli son proprie, o che ha saputo appropriarsi per le nuove forme ch' esse han ricevuto tra le sue mani. Sotto il nome di *Exposition du système du monde*, egli ne ha dato una specie di traduzione in lingua volgare, in cui senza impiegare alcun calcolo, sviluppa al lettore poco geometra, lo spirito dei metodi e l'andamento degl' inventori. In quest' opera egli ha ricondotto ai principj delle velocità potenziali le sue numerose ricerche sul sistema del mondo, ha ripigliata la meccanica dalle sue fondamenta ed ha dimostrato rigorosamente tutte le parti di questa scienza. LAPLACE è stato il primo a dimostrare analiticamente l' esistenza e la grandezza dell' atmosfera della luna, ed a scoprire la sua equazione secolare. Ha determinato le perturbazioni reciproche di tutt' i pianeti principali, e con importanti scoperte ha avanzato un travaglio simile per i satelliti di Giove, che LAGRANGE avae cominciato e che DELAMBRE ha portato a fine. In ultimo a LAPLACE è dovuta la gloria di dilatare i confini di una scienza che avea di già esercitato l' immaginazione di tanti genj profondi. Egli si è parimenti occupato di chimica, e gli si deve l' invenzione di un calorimetro. Ha ripetuto l' esperienze del celebre MONGE e di CAVENDISH sulla decomposizione dell' aria, ed i risultamenti di quest' esperienze sono state depositate nel *Journal polytipe* del 26 luglio 1786.

Nel 1816 LAPLACE fu nominato membro dell' Accademia di riorganizzazione della Scuola politecnica di Parigi. Colla nuova classificazione dei pari, egli è stato anche nominato marchese nel 1817.

Digitized by Google

Ecco l' elenco delle sue opere.

I. *Théorie du mouvement de la figure elliptique des sphéroïdes et de la figure des planètes*, 1784, in 4.

II. *Théorie des attractions des spheroïdes et de la figure des planetes*, 1785, in 4.

III. *Exposition du systéme du monde* (molte edizioni)

IV. *Traité de mecanique celeste* (molte edizioni).

V. *Theorie analitique des probabilites* (più edizioni).

VI. *Essai philosophique*, *ec.*

Oltre le succennate opere, LAPLACE ha dato ancora un gran numero di memorie inserite nella collezione dell' istituto dell' Accademia delle scienze di Parigi, e nel *Journal de l' école polytechnique.*

Sarebbe desiderabile che dopo qualche altro tempo si potesse distendere questo Catalogo. Auguriam vita lunga a soggetto cotanto degno, e procuriamo di profittare delle sue grandi scoperte, quando non ci torna conto imitare il suo carattere politico.

FINE.

Digitized by Google

TAVOLA DELLE MATERIE

PREFAZIONE del *Traduttore*. Pag. 3
INTRODUZIONE, 5

SAGGIO FILOSOFICO SULLE PROBABILITA'.

Cap. I. *Della probabilità*, 7
Cap. II. *Principj generali del Calcolo delle Probabilità*, 14
Cap. III. *Della Speranza*, 22
Cap. IV. *Dei metodi analitici del Calcolo delle Probabilità*, 26

APPLICAZIONE DEL CALCOLO DELLE PROBABILITA'.

Cap. I. *Dei giuochi*, 51
Cap. II. *Delle ineguaglianze occulte che possono esistere tra i colpi che si suppongono eguali* 53
Cap. III. *Delle Leggi della Probabilità, che risultano dalla moltiplicazione indefinita degli avvenimenti*, 56
Cap. IV. *Applicazione del Calcolo delle Probabilità alla Filosofia naturale*, 66
Cap. V. *Applicazione del Calcolo delle Probabilità alle Scienze Morali*, 91

Digitized by Google

Cap. VI. *Della Probabilità delle testimonianze*, 92
Cap. VII. *Della scelta e delle decisioni delle Assemblee*, 106
Cap. VIII. *Della Probabilità de' Giudizj de' Tribunali*, 110
Cap. IX. *Delle Tavole di mortalità, e delle durate medie della vita, dei matrimonj, e delle associazioni qualunque*, 118
Cap. X. *Dei beneficj degli stabilimenti che dipendono dalla probabilità degli avvenimenti*,
Cap. XI. *Delle illusioni nella stima delle probabilità*, 130
Cap. XII. *Dei diversi mezzi di approssimarsi alla certezza*, 146
Cap. XIII. *Notizia istorica sul calcolo delle probabilità.* 153

NOTIZIA BIOGRAFICA SUL CONTE LAPLACE 161

Fine della tavola delle materie.

ERRATA.

La rapidità con cui attualmente si succede l' impressione di tante opere in questa tipografia, dovrebbe farle sortire scorrettissime; la somma diligenza però genera il contrario; ma qualche lettera falsa, o qualche virgola di più o di meno è sempre inevitabile. A ciò dunque supplirà l'accorto legitore. Avverto solo che nella pag. 20 si è chiamato *ottavo principio* quello che avrebbe dovuto chiamarsi *settimo*; così *nono* si è chiamato l' *ottavo*, e progredendo: disattenzione che quantunque perdonabile, era dovere di confessare.

Digitized by Google

LIBRI DI FONDO

Che si trovano vendibili a prezzi fissi, presso lo stesso Marotta.

ALLIX, *teoria dell' universo*, ossia della cagione primitiva del moto, in 8 fig. 35

BALBI, *Compendio di Geografia Universale* conforme alle ultime politiche transanzioni e recenti scoperte, corredato di cinque elenchi sistematici delle principali lingue e di altrettante disertazioni sulla popolazione attuale delle cinque parti del Mondo, con molte note ad osservazioni del Sig. Taddej, aggiuntovi un supplemento che contiene il ristretto della Meccanica Celeste di Laplace, l' astronomia delle Dame di Lalande, ed altre aggiuzioni del medesimo traduttore, 3. vol. in 8. 2 00

(*il terzo volume si vende anche separatamente*) 80

Primi Elementi di Geografia moderna ad uso de' Giovanetti con note del Sig. Gio: Taddej. in 12. 30

CARAVELLI, *Corso Matematica*, 7 vol. in 8. 3 50

Calcolo Differenziale ed Integrale in 8. 60

Dizionario delle favole in 12. 20

Economia della Vita Umana tradotta dall' Inglese in 12. 10

FACCIOLATI *ortografia italiana*, nuova edizione in 4. 80

GIUSTINIANI *Memoria di un antico sepolcreto Greco-Romano*, seconda edizione accresciuta dall' autore, in 8. 50

I tre rarissimi Opuscoli di Simone Porzio, Girolamo Borgia, e Marcantonio delli Falconi, scritti in occasione della celebre eruzione avvenuta in Pozzuoli, l' anno 1538, colle memorie istoriche de' sudetti autori, in 8. 50

HORATII FLACCI cum notis Invencii in 12. 40

Idem, ad usum Delphini 2 vol. in 4. 1 60

LAPLACE *ristretto della Meccanica Celeste* tradotta dal francese, con note del Sig. Gio: Taddej, in 8. 80

Massime, e pensieri del PRIGIONIERE DI SANT ELENA, manoscritto trovato nelle carte di Las Casas, tradotto dal francese in 8. 30

MONTESQUIEU, *Spirito delle LL.* con note di *Ant. Genovesi*, 4 vol. in 8. 2 00

NIEUPOORT, *Rituum romanorum* in 12. fig. 30

OVIDII F. T. P. sine notis in 12. 25

Idem cum notis Minelli in 12. 35

Delle *Poesie Malinconiche* tradotte in Italiano dal *Padre Bernardo Clodio* 5 vol. in 12. 1 20

POLI, *Trattato sulla Calamita* ossia trattato sulla Podagra, in 8 grande figurato. 30

Regole ed Avvertimenti del Giuoco del tresette coll' aggiunta del Mediatore in 8, 20

del riversino, riveduta ed approvata da' più valenti giocatori, e colle aggiunte dei signori N. N., in 8. 20

Digitized by Google

RIVARD, *Tratta to del Calendario* tradotto dal francese dal Sig. *Lelio M. Fanelli* in 8. 45

Trattato della sfera del suddetto autore, tradotto dal francese ed aumentato dal medesimo Fanelli in 8. 80

ROSINI, *Sulla necessità di scrivere nella propria lingua* in 8. 15

ROSINI, *Giuochi diversi* per divertire le dame in conversazione, nuova edizione accresciuta dal sig. F. N. E. P. A. in 12. 15

lo stesso; raccolta di cento segreti, nuova edizione corretta ed aumentata di un supplemento del sig. N. N. in 12. 15

STORCHENAU, *Institutiones Logicae et Metaphisicae* 5 vol. in 12. 1 30

SOAVE *Loggica, Metafisica ed Etica, Opuscoli Metafisici, e Filosofia di Kant*, colle ultime osservazioni di *A. Lamellotti* 4. volumi in 12. 1 16

lo stesso in carta realella 4. vol. in 12. 2 00

Grammatica italiana, e latina in 12. 40

detta *Grammatica ragionata italiana*, in 12. 20

Trattato Elementare de' doveri dell' uomo, in 12. 15

Nuovi Idilj di Gesner, in 12. 20

Storia completa di Napoleone, estratta dalla Galleria Istorica de' Contemporanei, tradotta dal francese da P. V. F., aggiuntovi un estratto della vita di *Giuseppina* e di *Maria Luisa* Imperatrici in 8. 50

delle Costituzioni Politiche dell' Impero Francese dalla prima Dinastia sino all' attuale di Buonaparte, con un breve e particolar dettaglio della vita e gesta dell' immortal Napoleone in 8. 40

TROISI, *corso filosofico* 6. vol. in 8. 2 70

DE VERO, *Apparatus Philologus in* 12. 40

VITA DI GIOACCHINO MURAT, estratta dalla Galleria storica de' Contemporanei; preceduta da un transunto sulla Vita di Giuseppe Bonaparte; aumentata di relazioni officiali, di diverse interessanti notizie raccolte da varj luoghi, e precisamente dai *Pochi fatti sopra Gioacchino Murat* riportati nel giornale l' *Amico della Costituzione*; corredata da un articolo sulla Vita della regina Maria Annunziata Carolina, ec. ec., dal cittadino Lelio M. Fanelli, in 8. 40

LALANDE, *astronomia delle dame*, in 8. 50

Trattato sul giuoco del Bigliardo (opera nuova per l'Italia, e che esaurisce quanto si desidera intorno a questo nobilissimo giuoco), in 8. 15

Digitized by Google